

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского

Н. П. Гришина

ПОВЕДЕНЧЕСКИЙ ПОДХОД
К ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА
ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ

Саратов
Издательство Саратовского университета
2015

УДК [330.4:519.865.5](075.8)

ББК 65.050я73

Г85

Гришина, Н. П.

Г85 Поведенческий подход к проблеме выбора оптимального портфеля / Н. П. Гришина. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. — 120 с. : ил.

ISBN 978-5-292-04372-0

В монографии рассматривается проблема выбора портфеля ценных бумаг, основанная на поведенческом подходе с предубеждениями инвестора относительно избегания потерь и риска при выборе портфеля в условиях неопределенности. Основными результатами исследования являются разработанные эвристические подходы к поиску решений моделей теории перспектив и кумулятивной теории перспектив, представленных Канеманом и Тверски в 1979 и 1992 годах, а также сравнительный анализ этих моделей с традиционными моделью Марковица и моделью репликации индекса (слежения за индексом).

Для научных работников, магистрантов, аспирантов экономических, финансовых и математических специальностей высших учебных заведений, а также финансовых аналитиков, риск-менеджеров, трейдеров.

Табл. 38. Ил. 7. Библиогр.: 95 назв.

Р е ц е н з е н т ы :

доктор экономических наук *В. А. Балаш*
доктор физико-математических наук *С. П. Сидоров*

*Работа издана по тематическому плану 2015 года
(утвержден Ученым советом Саратовского государственного университета,
протокол № 3 от 24 февраля 2015 г.)*

УДК [330.4:519.865.5](075.8)

ББК 65.050я73

ISBN 978-5-292-04372-0

© Гришина Н. П., 2015

© Саратовский государственный
университет, 2015

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Модели портфельного инвестирования	11
1.1. Современная портфельная теория	11
1.1.1. Обозначения	14
1.1.2. Модель Марковица	14
1.1.3. Модель репликации индекса	16
1.2. Поведенческие финансы	18
1.2.1. Основы теории поведенческих финансов	19
1.2.2. Проблема принятия инвестиционных решений с точки зрения практики поведенческих финансов .	27
1.3. Теория перспектив	34
1.3.1. Формулировка модели теории перспектив	36
1.3.2. Формулировка модели кумулятивной теории перспектив	39
1.3.3. Модель теории перспектив с ограничением на кардинальность	41
1.3.4. Модель теории перспектив для слежения за индексом	42
1.4. Меры риска	43
1.4.1. Mean-CVaR модель	50
1.4.2. Mean-variance-CVaR модель	51
1.4.3. Модель теории перспектив с ограничением на CVaR	52
2. Методы решения	54
2.1. Поведенческие модели	55
2.1.1. Дифференциальная эволюция	56
2.1.2. Дифференциальная эволюция со сглаживанием функции полезности с использованием сплайн-аппроксимации	57

2.1.3. Генетический алгоритм	58
2.2. Модели с ограничением на CVaR	60
3. Результаты расчетов	63
3.1. Эмпирическое исследование	63
3.1.1. Используемые данные	63
3.1.2. Параметры моделей	65
3.1.3. Параметры эвристических методов решения	68
3.2. Сравнительный анализ результатов работы моделей	74
3.2.1. Связь с предыдущими исследованиями	74
3.2.2. Сравнительный анализ базовых моделей	75
3.2.3. Сравнительный анализ моделей с ограничением на кардинальность	81
3.2.4. Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR	82
3.3. Проблема слежения за индексом и модель теории перспектив	86
3.3.1. Базовые модели слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом	87
3.3.2. Модели слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом с ограничением на кардинальность	89
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	93
<i>Список литературы</i>	97
Приложения	105
Приложение 1. Реализация подходов к решению	105
Приложение 2. Параметры G и P для генетического алгоритма	110
Приложение 3. Результаты работы моделей	111

Введение

Проблема оптимизации портфеля ценных бумаг – многокритериальная проблема. С одной стороны, возникает вопрос, как определить количество (пропорции, доли) денежных средств, инвестируемых в каждый финансовый актив в рамках одного портфеля в целях получения наивысшего возможного дохода (или полезности) на конец инвестиционного периода. С другой стороны, должен быть достигнут минимальный уровень риска при приемлемом уровне доходности.

Основы современной портфельной теории (Modern Portfolio Theory (MPT)) заложены в статье [1] и книге, написанных нобелевским лауреатом Гарри Марковицем. Многие исследователи рассматривают появление теории как рождение современной финансовой экономики (см., например, [2]). Краеугольными камнями теории Марковица являются концепции доходности, риска и диверсификации. Общеизвестно, что инвестиционный портфель – это набор активов, приносящих прибыль, приобретаемых с целью достижения финансовых целей [2]. Однако понятие «инвестиционный портфель» как концепция не существовало до конца 1950-х годов.

В 1938 г. Джон Бурр Уильямс в книге «Теория инвестиционной стоимости» [3] представил модель дисконтирования дивидендов. Автор предлагает решать проблему инвестирования путем поиска «хорошей» ценной бумаги и покупки ее по лучшей цене. Многие инвесторы следовали его совету, и процесс инвестирования вскоре превратился в форму азартной игры для богатых людей.

В 1949 г. Бенджамин Грэм написал книгу «Разумный инвестор» [4], в которой он рекомендовал инвесторам при принятии своих решений опираться на фундаментальные факторы компании, т. е. на реальную стоимость ценной бумаги, поддержанную значением активов компании. Таким образом, целью инвесторов, согласно инвестиционной философии Грэма, стал поиск фундаментально хороших ценных бумаг компаний по дешевой цене. Эта концепция известна под названием «запас прочности».

Марковиц в 1952 г. использовал среднюю доходность, дисперсию (в качестве меры риска распределения доходностей) и ковариацию (в качестве меры степени того, как доходности двух финансовых активов движутся в тандеме [1]), чтобы получить эффективный фронт оптимальных инвестиционных портфелей, в каждом из которых вариация минимизирована для заданного уровня ожидаемой доходности (или, обратная формулировка (задача), ожидаемая доходность портфеля максимизирована для заданного уровня вариации). Следовательно, оптимальный портфель может быть выбран в соответствии с предпочтениями инвестора и его отношением к риску и доходности.

Одной из важнейших концепций в финансовой теории является диверсификация как способ уменьшения риска. Научная мысль предшествующих годов вдохновила Марковица и его последователей на концептуализацию основ выбора инвестиционного портфеля и в итоге привела к решению проблемы оптимизации портфеля ценных бумаг.

Удивительно длинный исторический путь стоит за появлением теории ожидаемой полезности (Expected Utility Theory (EUT)), которая зародилась в 1738 г., когда Даниэль Бернулли исследовал Санкт-Петербургский парадокс. Он был первым ученым, который разделил понятия «цена» и «полезность» с точки зрения определения значения товара. Цена – это оценка товара и зависит только от самого товара и его характеристик, т. е. цена – это объективное значение. Полезность, напротив, субъективна и зависит от специфических обстоятельств человека, который делает оценку [5]. EUT следует предположениям неоклассической теории индивидуального выбора в условиях появления риска. Она была разработана Джоном фон Нейманом и Оскаром Моргенштерном в книге «Теория игр и экономическое поведение» в 1944 году [6].

Центральной проблемой теории является представление об индивидуальном отношении к риску [7]. Начиная с 1950-х гг. появляются несколько научных работ, демонстрирующих свидетельства патернов, присущих индивидуумам при принятии решений в условиях риска, которые противоречат основам теории ожидаемой полезности (см. [8]). Также было показано [9], что поведение игроков нарушает аксиому независимости. Она гласит, что порядок предпочтения двух азартных игр (исходов игры) сохранится, даже если в каждую из них добавить третью с одинаковой вероятностью.

В то же время EUT не в состоянии объяснить многих парадоксов, которые имеют место в экономической практике (например, парадокс Алле [10]). Парадокс Алле посредством психологических экспериментов

опровергает один из постулатов EUT, согласно которому добавление одинакового количества блага (финансового результата) каждой из двух альтернатив не будет иметь никакого эффекта относительно привлекательности (желательности) одной игры в сравнении с другой. Другими словами, добавление одинакового количества блага отменяет само добавление как таковое. Однако результаты исследования реального выбора людей в ходе экспериментов Алле показывают, что это не так и упомянутое выше добавление оказывает влияние на выбор игрока.

Число недостатков EUT привело к появлению поведенческой портфельной теории (Behavioural Portfolio Theory (BPT)) – новой фундаментальной основы, которая разработана с целью компенсации заблуждений EUT. На сегодняшний день это лучшая теория, объясняющая поведение игроков и инвесторов при принятии решений в условиях риска, основываясь на данных, полученных экспериментально. В отличие от EUT BPT заполняет некоторые пробелы в объяснении противоречивых экономических феноменов, таких как парадокс Эллсберга [11]. Основная идея этого парадокса заключается в том, что люди в подавляющем большинстве предпочитают брать на себя риск в ситуациях, когда они знают конкретные шансы, а не альтернативный сценарий риска, в котором шансы неоднозначны. То есть они всегда будут выбирать известную вероятность победы над неизвестной вероятностью выигрыша, даже если известная вероятность достаточно низкая, а неизвестная вероятность может быть гарантией победы. Другими словами, в данном выборе принятия рисков (таких как ставки, к примеру) люди «предпочитают дьявола, которого они знают», вместо того, чтобы принимать риск, где шансы трудно или невозможно вычислить.

Глобальные финансовые кризисы новейшего времени показали недостатки индивидуальных рыночных инструментов и ограниченность их применения для инвестиционных решений. Это может быть объяснено пренебрежительным отношением инвесторов к оценке реальных рисков, поскольку обычно они просто следуют своей собственной интуиции. В инвестиционной практике неучтенные риски – это достаточно часто распространенное явление, однако инвестор нуждается в надежном математическом инструменте для обоснования своего инвестиционного решения. В этом исследовании мы рассматриваем BPT как новый эффективный инструмент, который обеспечивает учет поведенческих ошибок участников инвестиционного процесса.

Поведенческая портфельная теория была разработана Шеффриным и Стетманом в 2000 г. [12]. Основная идея данной теории заключается в максимизации значения (полезности) финансового портфеля инве-

стора, в котором достигаются несколько целей и эти цели рассматриваются с разными уровнями избегания риска. BPT базируется на двух основных теориях: теория безопасного потенциала/стремления (Security-Potential/Aspiration Theory (SP/A)) и теория перспектив (Prospect Theory (PT)). SP/A теория, основанная Лолой Лопез в 1987 г. (см. [13]), оперирует категорией общего риска (не только финансового) и не специфицирована для проблемы выбора инвестиционного портфеля. В нашей работе мы исследуем PT [14], посвященную поведению человека при принятии финансового решения в условиях неопределенности.

PT адаптировала основную идею теории ожидаемой полезности и добавила практически ценные психологические компоненты, которые учитывают поведение человека в процессе принятия решения. Она также исправила различные типы неточностей, которые имели место быть в ранее разработанных поведенческих теориях, например аксиому независимости и ошибочное предположение о равномерном отношении инвестора к риску (см. [12]).

Насколько нам известно, несмотря на множество работ, посвященных PT, только некоторые из них рассматривают ее практическое применение в экономике, в особенности на финансовых рынках. Это может быть объяснено, согласно Барберису [15], тем фактом, что PT – это теория, не готовая к использованию в качестве реальной экономической модели.

В этом исследовании мы применяем PT модель на различных эмпирических и экспериментальных выборках данных для того чтобы найти оптимальное решение проблемы выбора инвестиционного портфеля. Мы также тестируем полученные результаты вне выборочных данных и сравниваем динамику PT модели с результатами, полученными в рамках исследования модели Марковица и модели слежения за индексом.

Основная цель настоящего исследования состоит в выявлении потенциальных преимуществ модели теории перспектив, основанной на поведенческих особенностях инвестора, в зависимости от различных ситуаций и сценариев на рынке ценных бумаг в сравнении с общепринятыми моделями портфельной оптимизации.

В соответствии с указанной целью поставлены следующие задачи:

- разработка соответствующих подходов к решению модели теории перспектив и ее дополненной версии – модели кумулятивной теории перспектив;
- идентификация оптимального подхода к решению посредством сравнительного анализа различных алгоритмов и выбора их оптимальных параметров;

- исследование результатов работы изучаемых моделей (теории перспектив и кумулятивной теории перспектив) в сравнении как с моделью Марковица, так и с моделью слежения за индексом с различными ограничениями;
- рассмотрение данных моделей с ограничением на кардинальность;
- рассмотрение данных моделей с ограничением на CVaR;
- анализ результатов работы моделей на вневыборочных данных, на которых получены решения, в различных условиях поведения рынка (при использовании сгенерированных методом Монте-Карло данных, отражающих динамику «бычьего» и «медвежьего» тренда).

Данная монография состоит из введения, трёх глав, библиографического списка и приложений. Введение является вспомогательной частью работы, дающей вводные знания, основную цель и задачи, а также мотивацию и актуальность исследования. Оно содержит краткий экскурс в историю проблемы выбора портфеля ценных бумаг.

В главе 1 представлены литературный обзор работ по основным рассматриваемым портфельным теориям и математические формулировки изучаемых моделей портфельной оптимизации, а также определения некоторых мер риска, используемых в исследовании.

В главе 2 мы разрабатываем и реализуем несколько подходов к решению нелинейной проблемы портфельной оптимизации. В параграфе 2.1 описаны два базовых эвристических подхода, а именно алгоритм дифференциальной эволюции и генетический алгоритм. Оба алгоритма подходят для поиска решения задачи теории перспектив и задачи кумулятивной теории перспектив, которые не являются задачами выпуклой оптимизации, а также эффективны в случае рассмотрения этих проблем с дополнительными ограничениями на кардинальность и величину CVaR. Мы используем расширенную версию алгоритма дифференциальной эволюции, а именно алгоритм дифференциальной эволюции со сглаживанием функции полезности, задействуя сплайн в целях верификации полученного решения и поиска оптимального подхода к решению задачи. В параграфе 2.2 рассмотрен подход к решению многокритериальной задачи mean-variance-CVaR.

В главе 3 мы представили наше эмпирическое исследование и сравнительный анализ. Параграф 3.1 посвящен основным параметрам (настройкам) эмпирического исследования, таким как данные, использованные в исследовании, параметры моделей и эвристических подходов к решению задач. В параграфе 3.2 проанализированы результаты работы модели Марковица и поведенческих моделей. Мы разделили все модели

на три группы: базовые модели, модели с ограничением на кардинальность и модели с ограничением на величину CVaR. Эмпирические результаты, полученные для каждой модели, анализируются на контрольной выборке и вне выборочных данных. Мы генерируем методом Монте–Карло динамику «бычьего» и «медвежьего» рыночных трендов в качестве тестов вне выборочных данных, а также применяем бутстрэп метод. В параграфе 3.3 представлены эмпирические результаты и сравнительный анализ работы модели слежения за индексом и модели теории перспектив со слежением за индексом.

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00140).

Глава 1

Модели портфельного инвестирования

1.1. Современная портфельная теория

В данном параграфе мы рассматриваем несколько основных утверждений современной портфельной теории (Modern Portfolio Theory (MPT)), которые значимы для нашего исследования. MPT предполагает, что инвестор действует рационально и что он всегда избегает риски. Это утверждение вытекает из гипотезы эффективного рынка и означает, что люди выбирают альтернативы, которые экономически более выгодны для них. Изначально Марковиц объяснял рациональность инвестора в терминах определенности и доходности. Он посвятил свою модель инвесторам, которые предпочитают более высокие доходности меньшим, а также определенность неопределенности. В то же время он принимал тот факт, что существуют инвесторы, которые действуют больше как спекулянты. Однако он не предполагал, что даже рациональный инвестор превращается в искателя риска в специфических условиях. Согласно Марковицу, MPT не предназначена для подобных случаев [16].

Среди новейших попыток инкорпорировать человеческую ментальность в логичную и практичную структуру модели Марковица мы можем отметить результаты, опубликованные Дас с соавторами в статье «Портфельная оптимизация с учетом ментальных особенностей» [17]. В этом исследовании авторы рассматривают портфель как множество субпортфель с различными финансовыми целями и предпочтениями инвестора в соотношении риск/доходность. Математически идея заключается в использовании квадратичной функции полезности модели Марковица с коэффициентом избегания риска. Затем они определили разные уровни избегания риска в зависимости от специфических целей каждого субпортфеля внутри потенциального оптимального портфеля по модели Марковица [17]. «Это обобщение MVT (Mean-Variance Portfolio Theory. – *Н. Г.*) и BPT (Behavioural Portfolio Theory. – *Н. Г.*) через структуру унифицированного МА (Mental Accounting – учет ментальных особенностей. – *Н. Г.*)

дает в результате плодотворное объединение потребительских целей инвестора и финансовой производительности портфеля»* [17, с. 327]. Однако некоторые вопросы до сих пор остаются без ответа. Например, проблема диверсификации портфеля ценных бумаг оказалась полностью проигнорированной в статье.

Проблема диверсификации в целом – это вопрос о том, сколько различных финансовых инструментов (активов) в портфеле будет необходимо и достаточно для обеспечения эффективности портфеля с точки зрения снижения риска и транзакционных издержек. Более того, оптимальный уровень диверсификации должен обеспечивать удобство в управлении портфелем. Мы рассмотрим эту проблему в дальнейшей дискуссии.

Современная портфельная теория основывается на предположении, что доходности активов есть нормально распределенные случайные величины [18]. Однако в начале 1960-х гг. некоторые ученые продемонстрировали, что гауссовское (нормальное) распределение не подходит для описания распределения реальных исторических доходностей. Например, Мандельброт [19] и Фама [20] представили модели распределения доходности финансовых активов, которые отличаются тяжелыми «хвостами». Эти эмпирически полученные распределения случайной величины доходности показывают значительную островершинность, асимметричный скос и тяжелые «хвосты».

На сегодняшний день общепринятым считается факт, согласно которому распределение доходности имеет тяжелые «хвосты». Эти «хвосты» определяются как редкие, но значительные события на финансовом рынке, которые могут стать причиной экстремальных доходов или убытков в портфельном инвестировании. В рамках нормального распределения вероятность таких событий равна 0.1%, в реальности эти события, формирующие тяжелые «хвосты», случаются гораздо чаще.

Известно, что модель Марковица проводит оптимизацию, которая основывается на исторических средних доходностях в целях оценки будущих доходностей портфеля. Это означает, что такой портфель составлен на основании расчетов с использованием средних доходностей и ковариационной матрицы данных, отражающих движения рынка в прошлом. Однако исторические оценки обычно предоставляют слабый прогноз будущего поведения финансовых активов в реальных условиях рынка [21]. Поэтому многие эмпирические исследования проблемы выбора портфеля включают не только результаты работы моделей на основной выборке, но и тестирование на вневыборочных данных.

*Цитируемый текст переведён автором данной монографии.

Другим недостатком МРТ являются неучтенные транзакционные издержки, которые могут оказывать значительное влияние на финансовый результат инвестиционного портфеля [22]. С одной стороны, в условиях быстро меняющегося рынка ценных бумаг стадия пересмотра портфеля играет очень важную роль в целях поддержания его оптимальности. Эта операция приводит к возрастанию транзакционных издержек и тем самым снижает текущую доходность. С другой стороны, игнорирование транзакционных издержек в модели выбора портфеля часто приводит к финансовой неэффективности портфеля на практике [23].

В нашей работе мы показываем, как технически решить проблему уровня диверсификации с точки зрения предпочтений инвестора. Мы ограничиваем транзакционные издержки, используя ограничение на кардинальность в постановке задачи, что является ограничением на количество активов в портфеле.

Эмпирически доказано, что диверсификация выше уровня 8–10 активов в портфеле может оказаться невыгодной [24–26]. С математической точки зрения оптимальный портфель в рамках современной портфельной теории всегда хорошо диверсифицирован, потому что минимизация риска зависит от ковариационной матрицы доходностей. Чем больше различных финансовых инструментов в портфеле, тем меньше общее количество риска в наборе ценных бумаг с разными параметрами распределения доходности. Однако было обнаружено [27,28], что вариационно/ковариационная матрица доходностей для портфелей с большим количеством активов склонна к нивелированию значительной сингулярности или околосингулярности, следовательно, количество финансовых инструментов в портфеле должно быть ограничено.

Принимая во внимание утверждения, рассмотренные выше, мы можем заключить, что МРТ является достаточно общей и статичной теорией для значительного круга практических ситуаций, в то же время она достаточно проста для теоретического анализа и численного решения. Однако проблема выбора финансового портфеля становится все более сложной в современных экономических условиях, которые требуют более гибких и многофакторных моделей и инструментов, чтобы удовлетворить предпочтения инвесторов, в то время как постулаты МРТ – приводят к серьезным ограничениям. МРТ – «это очень полезная, вместе с тем описательная, не предписательная (модель), и опирается на утверждения (допущения), которые не всегда могут быть действительными»*, согласно Кертизу [29].

Далее мы сформулируем математическую модель Марковица с ограничением на кардинальность.

*Перевод автора.

1.1.1. Обозначения

Для начала обозначим некоторые основные переменные, которые будут использованы для всех моделей, рассмотренных в данном исследовании. В этой главе и далее в работе мы используем следующие переменные:

N – количество финансовых активов,

S – количество сценариев (временных периодов),

K – предельное значение кардинальности (желаемое количество активов в портфеле),

p_s – вероятность сценария s , $\sum_s p_s = 1$,

$\bar{r}_i$ – средняя доходность актива i ,

r_{is} – доходность актива i в сценарии s , $i = 1, \dots, N$, $s = 1, \dots, S$,

r_0 – референтная точка,

$\omega_i \geq 0$ – вес (доля) актива i в портфеле,

$x = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ – портфель и $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$,

$X = \{x = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}_+^N\}$ – множество всех портфелей,

$r_s(x)$ – доходность портфеля x в сценарии s ,

d – желаемый уровень доходности,

z – ограничение на CVaR,

$\succeq$ обозначает отношение предпочтения на множестве перспектив, в котором $\succ$ – это строгое отношение предпочтения и $\sim$ – отношение индифферентности.

Введем также условные обозначения некоторых сокращений для удобства нашей работы:

MV – модель Марковица,

IT – модель слежения за индексом,

PT – модель теории перспектив,

CPT – модель кумулятивной теории перспектив,

Индекс СС указывает на введение ограничения на кардинальность.

1.1.2. Модель Марковица

Дисперсия портфеля $r(x)$ определяется как $\sigma^2(r(x)) = E[(r(x) - E(r(x)))^2]$. Вариация доходности портфеля ценных бумаг $r(x) = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_N r_N$ получена из вектора $x = (\omega_1, \dots, \omega_N)$ и может быть переписана как

$$\sigma^2(r(x)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \omega_i \omega_j,$$

где $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ (здесь ρ_{ij} – коэффициент корреляции между доходностями активов r_i и r_j) – ковариация r_i и r_j ; x – вектор переменных весов ω_i , $i = 1, \dots, N$, активов в портфеле ценных бумаг (ω_i , $i = 1, \dots, N$, – неизвестные величины).

В нашем исследовании мы рассматриваем модель Марковица [1], где минимизируется дисперсия портфеля ценных бумаг с фиксированным (предписанным) уровнем ожидаемой доходности. Эта модель позволяет инвестору включать все доступные на рынке (на используемом множестве данных) активы. В случае, когда число активов в портфеле ограничено предпочтениями инвестора, необходимо ввести ограничение на кардинальность.

Пусть K будет желаемым количеством активов в портфеле, тогда необходимо определить индикатор φ_i , $i = 1, \dots, N$:

$$\varphi_i = \begin{cases} 1, & \text{если актив } i \text{ включен в портфель,} \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и $l_i \varphi_i \leq \omega_i \leq u_i \varphi_i$, $i = 1, \dots, N$, где l_i и u_i – численные границы, которые отражают нижний и верхний уровень инвестиций в актив, если он будет выбран для инвестирования.

Необходимо отметить, что модель с ограничением на кардинальность можно трансформировать в базовую модель Марковица, если положить $K = N$. Для простоты описания исследования мы используем унифицированную формулировку для двух моделей Марковица – базовой и с ограничением на кардинальность. Тогда проблема оптимизации портфеля ценных бумаг, согласно теории Марковица, может быть записана как

$$MV_{cc}(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \omega_i \omega_j \rightarrow \min, \quad (1.1)$$

при ограничениях

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.2)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.3)$$

$$l_i \varphi_i \leq \omega_i \leq u_i \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.4)$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \leq K, \quad (1.5)$$

$$\varphi_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.6)$$

Здесь ограничение (1.2) обеспечивает удовлетворение условия, что оптимальный портфель дает ожидаемую доходность не ниже установленного d , ограничение (1.3) следит за тем, чтобы доли активов в портфеле давали в сумме единицу (ограничение бюджета). Неравенство (1.4) описывает порог покупки одного актива в портфель и одинаково ограничивает инвестиции в любой актив. Легко увидеть, что, если актив i не содержится в портфеле, т. е. $\varphi_i = 0$, тогда соответствующий вес $\omega_i = 0$. Если актив i попадает в портфель, т. е. $\varphi_i = 1$, тогда (1.4) контролирует, чтобы значение доли ω_i лежало между установленными нижним и верхним пределами, l_i и u_i соответственно [30]. Неравенство (1.5) проверяет, чтобы количество активов в оптимальном портфеле было не более чем K . Бинарное определение (1.6) отражает включение (или исключение) актива в портфель.

Согласно формулировке проблемы и теоретическим основам, модель Марковица управляет риском портфеля, учитывая ковариационную матрицу и дисперсию доходностей активов. Современная портфельная теория и работа Гарри Марковица в области диверсификации и риска финансового портфеля стали основой модели определения стоимости капитала (САРМ), которая различает два типа портфельного риска: систематический и несистематический. Систематический риск рассматривается как рыночный риск, т. е. недиверсифицируемый и общий для всех активов на рынке, в то время как несистематический риск ассоциируется с каждым конкретным финансовым инструментом. С точки зрения САРМ оптимальный портфель, цель которого – достижение минимального риска при любом возможном доходе, это и есть рыночный портфель, который на самом деле может быть рыночным индексом. Следуя утверждению САРМ проблема слежения за индексом в выборе портфеля – это репликация «идеального» рыночного портфеля в целях снижения систематического риска.

1.1.3. Модель репликации индекса

Слежение за индексом (репликация индекса) известно как форма пассивного управления инвестициями, цель которой – создать оптимальный портфель, повторяющий динамику рыночного индекса, предоставляя баланс между риском и доходностью. Однако модель слежения за индексом обычно включает в портфель практически все доступные на рынке финансовые инструменты, что приводит к значительным транзакционным издержкам и составляет портфель, которым очень сложно управлять на практике из-за сильной диверсифицированности [31]. В связи с этим

в данном исследовании в модель слежения за индексом добавлено ограничение на кардинальность. Мы изучаем эту модель в сравнении с моделями, основанными на теории поведенческих финансов, исследуя их по критериям уровня диверсификации и ошибки слежения.

В нашем исследовании мы используем простую модель слежения за индексом в форме полного копирования динамики движения индекса посредством минимизации ошибки слежения в целях уменьшения разницы между доходностями индекса и портфеля.

Пусть в момент времени s

rm_s – доходность индекса,

$o_s = \max(r_s(x) - rm_s, 0)$ – доходность портфеля выше доходности индекса,

$u_s = \max(rm_s - r_s(x), 0)$ – доходность портфеля ниже доходности индекса.

Ошибка слежения (tracking error (TE)) для заданного временного периода s равна $|r_s(x) - rm_s|$. Очевидно, что в момент времени s по крайней мере один из показателей o_s или u_s равен 0, т. е. мы можем определить новую величину

$$TE_s = o_s + u_s = \begin{cases} o_s, & \text{если } o_s \geq 0, \\ u_s & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.7)$$

Определим ошибку слежения за индексом (в простейшей форме) как разницу между доходностями индекса и портфеля по всем временным периодам $s = 1, \dots, S$:

$$TE = \sum_{s=1}^S TE_s. \quad (1.8)$$

Мы бы хотели отметить, что ошибка слежения за индексом может быть определена различными способами, например, в [32] ошибка слежения выражается как среднеквадратичная разница между доходностями индекса и портфеля.

Как было отмечено ранее, мы можем использовать формулировку модели с ограничением на кардинальность для формулирования базовой модели, когда полагаем $K = N$. Тогда проблема слежения за индексом с ограничением на кардинальность может быть сформулирована следующим образом [33]:

$$IT_{cc}(x) = \text{minimise } TE(x) = \sum_{s=1}^S (o_s + u_s) \rightarrow \min, \quad (1.9)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N \omega_i r_{is} = rm_s + o_s - u_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.10)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.11)$$

$$l_i \varphi_i \leq \omega_i \leq u_i \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.12)$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \leq K, \quad (1.13)$$

$$\varphi_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.14)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.15)$$

$$o_s, u_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (1.16)$$

Неравенства (1.10) проверяют разницу между доходностями портфеля и индекса в каждом временном периоде. Ограничения (1.11), (1.12), (1.13) и (1.14) сформулированы так же, как и для модели Марковица, и используются для ограничения на сумму долей активов и количество активов в портфеле.

1.2. Поведенческие финансы

Реальность современных финансов состоит в том, что под воздействием развития смежных наук происходит масштабный сдвиг научной парадигмы финансов. Эта проблема характерна не только для финансов, но и для многих других сфер знаний в современном мире. Причин тому много и основные из них – это международная интеграция в науке и развитие новых технологий и нестандартных подходов к традиционным научным проблемам.

Проблемы современной теории финансов, как и теорий в других отраслях экономики, порождаются двойственностью целей: определить оптимальный выбор индивидуума; описать процесс реального выбора индивидуума. Классическая теория финансов в полном объеме справляется с первой целью, однако абсолютно беспомощна в достижении второй. Подобные проблемы в финансовой науке позволяют предположить, что новая парадигма будет сочетать в себе элементы неоклассической теории и черты теории поведенческих финансов.

Сторонники теории поведенческих финансов утверждают, что психология проникает во все три компонента традиционной парадигмы: рациональное поведение, модель САРМ и теорию эффективного рынка.

Альтернативой количественным теориям ценообразования на финансовые активы и методам оптимизации портфеля являются так называемые

«поведенческие финансы» – относительно молодое направление, критикующее результаты количественных методов. Предметом поведенческих финансов является изучение влияния присутствия человека на финансовые рынки. В стандартном курсе финансов отсутствует человек как главный субъект финансовых отношений.

Поведенческие финансы – это учение о том, как психология влияет на принятие решений на уровне индивидуальных финансов, финансовых рынков и организаций. Поведенческие финансы не предполагают, что участники финансовых отношений будут рациональными и рынки лишены трений. Исследователи полагают, что институциональная среда является жизненно важной. Отправной точкой для них является ограничение рациональности всех элементов финансовой структуры.

Поведенческие финансы изучают причины и следствия неэффективности финансовых рынков: где встречаются неэффективности рынка и почему они существуют; почему простым инвесторам свойственно ошибаться; почему арбитражеры не в состоянии исправить неэффективности рынка.

1.2.1. Основы теории поведенческих финансов

Финансовый рынок эффективен тогда и только тогда, когда цена каждой ценной бумаги равна ожиданию приведенной стоимости будущих доходов на эту ценную бумагу (т.е. ее фундаментальной стоимости). В 1978 г. Дженсен назвал эффективность финансовых рынков самым хорошо эмпирически доказанным фактом.

Существует несколько форм эффективности финансового рынка.

Слабая форма эффективности рынков или гипотеза о случайном блуждании: доходность акций не может быть спрогнозирована, если пользоваться информацией о ее прошлой доходности. Действительно, довольно сложно распознать какую бы то ни было закономерность во временных рядах доходности акций, однако феномен «оверреакции» противоречит гипотезе случайного блуждания. Поэтому даже в слабой форме рынок может быть неэффективен.

Среднесильная форма эффективности финансовых рынков: доходность акций не должна быть прогнозируема на основе любой общедоступной информации. Однако Фама и Френч обнаружили интересную эмпирическую закономерность – используя отношение балансовой стоимости к рыночной стоимости акций компании, можно предсказать скорректированную на риск доходность акций [34].

Сильная форма эффективности финансовых рынков: доходность акций не может быть спрогнозирована, если пользоваться любой информацией, поэтому даже использование инсайдерской информации не должно приносить сверхприбылей. Однако инсайдеры, имеющие информацию о компании в которой они работают, могут получать на рынке сверхприбыли.

Таким образом, можно утверждать, что финансовые рынки не всегда и необязательно являются эффективными. Следствием эффективности рынков является отсутствие памяти, поэтому можно сделать вывод о том, что у финансовых рынков в реальности зачастую есть память.

Принимая во внимание развитие этой науки с 1970-х гг. по настоящее время, ученые многого добились и, по сути, создали новую теорию – теорию поведенческих финансов. Все полученные ими результаты условно можно разделить на три класса:

- 1) описание аномалий поведения (предсказуемые ошибки, такие как самоуверенность в суждениях, принятие желаемого за действительное, поведенческая близорукость и прочее);
- 2) спекулятивная динамика цен на финансовые активы на мировых рынках;
- 3) обоснование того, что не всегда процесс принятия решений, формирующий результаты этих решений, является рациональным.

Эта схема обеспечивает основы поведенческих финансов. Теория поведенческих финансов строится на трех основных блоках в поведении индивидуума:

- 1) настрой как принятое внутреннее решение или знание;
- 2) поведенческие предпочтения;
- 3) пределы арбитража.

Рассмотрим п е р в ы й б л о к. Настрой инвесторов приводит к ошибкам в принятии решений в портфельном управлении. Ошибки происходят на уровне индивида, но могут проявляться и на уровне рынка в целом. Психология показывает, что убеждения людей часто ошибочны. Во многих случаях источником проблемы является познание. То есть данная проблема – это функция, зависящая от того, как люди думают.

Наиболее важным фактом является то, что обычно человек очень самонадеян в том, что касается собственных знаний и умений. Этот факт имеет много последствий. Например, самоуверенность может привести к недооценке инвесторами рисков или переоценке своих способностей «перехитрить» рынок и его законы. Инвесторы также испытывают негативные последствия от сочетания самоуверенности или самонадеянности

и смещение ответственности за результаты принятых решений, т. е. люди приписывают успех своим собственным навыкам, а вину за провал возлагают на невезение.

В рамках дискуссии о важности настроя (принятого внутреннего решения) другой важной идеей в психологических особенностях человека является то, что он склонен смещать акценты получаемых подтверждений каких-либо фактов. Это означает, что люди охотнее видят доказательства, подтверждающие их точку зрения, и не обращают внимания на противоположенные свидетельства. Поскольку человек склонен к смещению подобных акцентов, время от времени он не способен на объективную оценку ситуации, исходя из существующей информации. Корни этой проблемы лежат в персональном восприятии новых знаний и информации. Люди лучше понимают и соглашаются с тем утверждением или положением среди прочих, которое подходит ближе к его естественному образу мыслей, так как в этом случае концептуализация происходит легче.

К примеру, такая мера риска как среднеквадратическое отклонение, основанная на мере неприятия риска, ближе к естественному восприятию данной концепции или ситуации, чем неопределенные игры с вероятностями. В то же время результат восприятия одной и той же информации разными людьми (предполагаются люди с разными представлениями о себе и окружающей действительности) будет разным.

В т о р о й б л о к отражает склонность большинства людей действовать аналогичным образом в определенных ситуациях, связанных с терпимостью к риску. Многие психологические тесты показывают, что люди предпочитают большее меньшему; они предпочитают игры, руководимые финансовыми рисками (т. е. очень рискованные игры, где возможный выигрыш достаточно велик), умеренным альтернативам.

Кроме того, особенно важным аспектом в данном случае, в контексте реальных финансовых решений, является то, как риск-предпочтения могут зависеть не только от особенностей каждого отдельного продукта (товара, услуги) или финансового выбора, но и от того, как данная альтернатива относится к другим имеющимся вариантам. Это означает, что варианты оцениваются не сами по себе, а в сравнении с прочими предложенными, и что риск-предпочтения инвестора не объективен и зависит от диапазона доступных вариантов. Природа человека устроена таким образом, что среди трех вариантов, расположенных по уровню риска от меньшего к большему, он склонен выбирать средний, что говорит о нерациональности принятия решения, если сравнивать со стандартными экономическими и финансовыми критериями.

Предпочтения инвесторов являются вторым ключевым элементом поведенческих финансовых моделей. В связи с этим существуют несколько научных теорий, изучающих предпочтения, которые основаны на поведенческих особенностях. Наиболее известная из них – это теория перспектив, которая была разработана, чтобы описать, каким образом люди систематически нарушают аксиомы теории ожидаемой полезности. Поведенческие предпочтения охватывают область отношений к риску и доходности, которые не соответствуют принципам теории ожидаемой полезности. Теория перспектив отличается от теории ожидаемой полезности тем, что вероятности трансформируются в веса решений (трансформированные вероятности) и значение функции полезности теории перспектив определяется в зависимости от прибыли и убытка, а не от конечного богатства. Прочие научные теории поведенческих предпочтений известны под названиями: изменение теории процесса, теория сожаления, теория аффектов и теория самоконтроля [14].

Избегание потерь отражает нежелание инвесторов терпеть убытки. Люди оценивают вес потерь вдвое больше, чем выгоду одинакового масштаба. В отличие от того, что предлагает неоклассическая теория, инвесторы, избегающие потери, могут неадекватно относиться к риску как таковому. Они предпочитают избегать риск в целях защиты имеющегося богатства, в то время как принимают риск во избежание неотвратимых потерь. Другими словами, когда они сталкиваются либо с неизбежными потерями, либо с очень рискованной игрой (рулеткой), которая даже оставляет открытой перспективу безубыточности, большинство людей выбирают рулетку, даже если их ожидаемый выигрыш меньше, чем неизбежные потери.

Что касается т р е т ь е г о б л о к а, именуемого арбитражными ограничениями, выясняется следующее. В неоклассической финансовой теории рационально информированные трейдеры используют поведенческие несоответствия иррациональных трейдеров для того, чтобы привести цены к эффективным (трейдеры шума или торговцы с предвзятыми убеждениями, принимающие решение не на основе фундаментального анализа, а под действием эмоций). Сторонники поведенческих финансов предполагают, что существуют ограничения на процесс арбитража и в результате цены не должны быть эффективными.

Наконец, ограниченный арбитраж играет важную роль в поведенческой оценке активов. Стоит уточнить, что основным принципом современных финансов является то, что цены сил арбитражеров (лиц, занимающихся арбитражными операциями) сходятся с их справедливой фундаментальной стоимостью. Тем не менее исследования обнаружили

ряд явлений финансовых рынков, которые не соответствуют предположению, что возможно осуществление полного арбитража. По этой причине модели поведенческой оценки активов фокусируются на ограничениях, с которыми арбитражеры сталкиваются в попытке воспользоваться их неоцененностью. Рынки не лишены трения из-за операционных расходов, налогов, маржинальных платежей и т.д. Таким образом, действия иррациональных трейдеров становятся причиной неэффективности цен. Как результат – арбитраж становится рискованным.

Шефрин опубликовал несколько научных работ, посвященных изучению поведенческих помех на пути максимизации стоимости активов (портфелей). В одной из них он пытается найти психологическое объяснение различных аспектов поведения человека в процессе принятия решений [35]. Ученый считает также, что участникам инвестиционной деятельности необходимо осознавать два ключевых поведенческих препятствия. С одной стороны, менеджеры совершают ошибки из-за несовершенства восприятия и эмоционального влияния. Это внутренние корпоративные препятствия, связанные с поведенческими особенностями, которые также называют поведенческими расходами (потерями). С другой стороны, существуют внешние по отношению к компании поведенческие помехи [35].

Реальность такова, что во многих случаях поведенческие предубеждения могут превалировать над экономическими и финансовыми стимулами. Это явление напоминает о другой большой проблеме для всех компаний. Она называется традиционной агентской проблемой, которая заключается в потреблении и привилегии. Высшее звено руководства компании – люди, которые имеют приоритет в праве принятия решений, часто склонны игнорировать опасные тенденции и экономические сигналы в управлении инвестиционными проектами. Это происходит потому, что они подвержены определенным поведенческим привычкам, таким как самоуверенность, неприятие потерь и склонность смещать акценты получаемых подтверждений. Зачастую налицо сочетание подобных поведенческих препятствий.

Однако данная проблема касается не только корпоративных финансов. Индивидуальные инвесторы и прочие финансовые специалисты, которые ответственны за управление активами своих клиентов или финансовый консалтинг, также подвержены манипуляции собственных внутренних поведенческих привычек.

Шефрин нашел и изучил еще одно психологическое явление, такое как эффект группового поведения в принятии решений. Лучшие специалисты в области экономики и финансов также изучают этот эффект и об-

наружили несколько интересных фактов. Один из ключевых вопросов здесь – является ли групповое поведение усиливающим или ослабляющим фактором когнитивных ошибок, к которым склонны индивидуумы? Исследователи выяснили, что группа усиливает индивидуальные ошибки. Старшие менеджеры, работающие в отделах (в коллективе), становятся более склонными к увеличению своих инвестиций в проекты, результаты которых могут быть сомнительными.

В случае со второй группой препятствий – внешними – мы сталкиваемся с изучением поведения других инвесторов и аналитиков. Их ошибки создают разницу между фундаментальной стоимостью актива и его рыночной ценой. Менеджеры время от времени сами убеждаются в том, как ошибки аналитиков и инвесторов становятся фактором их собственных просчетов в принятии инвестиционных решений.

Несмотря на то что оба типа в итоге порождают иррациональные решения, поведенческие предубеждения грубо можно разделить на две категории: когнитивные и эмоциональные. Из-за того, что когнитивные искажения вытекают из неправильного восприятия, более полная информация и консультации, однако, могут исправить эти ошибки. С другой стороны, эмоциональные предубеждения, такие как сожаление и стремление избежать потери, происходят из-за импульсивных побуждений или на основе интуиции, а не из-за осознанных рассуждений, и поэтому их сложно исправить. Были исследованы некоторые возможные связи между психологическими факторами и трейдинговой активностью. Установлено, что субъекты, чьи эмоциональные реакции (как в положительную, так и в отрицательную сторону) на денежные прибыли и убытки были более интенсивными, продемонстрировали результаты торговой деятельности значительно хуже, чем прочие трейдеры.

Можно предположить, что причины ошибок менеджеров, таких как когнитивные несовершенства и эмоциональные влияния, могут быть частично причиной того, почему рынок и цены не эффективны, поскольку рынок – это система, которая включает человеческий фактор. Кроме того, если ключевые элементы рынка – это инвесторы и аналитики и они склонны действовать определенным образом, то рынок имеет память, так же как и весь спектр привычек и обычных реакций участников. Интересно отметить, что региональные рынки порой имеют очень разные динамические субъекты их собственной группы поведенческих черт. Характерные особенности людей, которые участвуют в торговле активами, определяют цены и уровень эффективности рынка.

Экономисты спорят, имеют ли рынки память или нет. Некоторые из них предполагают, что у рынков нет памяти – что прошлые цены акций

не указывают на их поведение в будущем. Другие доказывают с помощью практических примеров, что рынки имеют память. Кроме того, инвесторы действуют согласно информации о предыдущей динамике рынка.

Данную проблему можно рассмотреть на примере первичного размещения акций (IPO) на рынке. Конфликт состоит в том, что черты IPO имеют три поведенческих явления, вовлекающих память рынка, которые не согласуются с гипотезой эффективных рынков:

- 1) перегретый рынок;
- 2) первоначальная недооцененность;
- 3) долгосрочная неудовлетворенность.

Важным фактором для целей максимизации стоимости признаются поведенчески индуцированные препятствия. Объективно говоря, мы не можем избежать рисков, имея дело с инвестированием, но нам стоит стремиться получить больше понимания наших поведенческих привычек-препятствий на пути эффективного смягчения индивидуальных психологически индуцированных ошибок, с одной стороны, и принять во внимание иррациональное финансовое поведение окружающей среды, с другой стороны.

С точки зрения финансов это дает экономистам понимание внутренних особенностей человеческого сознания в отношении финансового поведения. Это знание поможет в разработке новых методов и моделей оптимизации финансового портфеля.

Математическая модель и программное обеспечение не могут работать эффективно без взаимодействия с пользователем. Это означает, что вычислительные программы должны учитывать также финансовую грамотность и знания и восприятие риска инвесторов как часть комплекса причин поведения человека. В этом случае требуется «финансовая эргономика», дисциплина, которая проектирует финансовые продукты и услуги согласно потребностям человека и которая оптимизирует благосостояние и общую производительность системы.

Финансовое поведение людей связано с финансовыми знаниями. В соответствии с этим финансовые знания имеют два аспекта, таких как объективное знание и субъективное знание. Объективное знание – это получение финансовой информации посредством эффективного обсуждения с использованием приобретенных знаний, в то время как субъективное знание зависит от того, что инвесторы считают, что они знают. Второй вид, так как он представляет предвзято оцененную интерпретацию первого, соответствует уровню самоуверенности инвесторов, который становится очевидным в процессе принятия решения.

Принятие риска – это важный аспект финансового поведения людей. Известно, что этот уровень зависит от многих факторов – таких как возраст, образование, доход, богатство и даже характер. Например, многие исследования обнаружили, что инвесторы, уделяющие слишком большое внимание чувствам, имеют пониженную терпимость к рискованному поведению, в то время как инвесторы, уделяющие внимание мышлению, имеют более высокий уровень терпимости к рискованному поведению.

Кроме того, гендерные различия влияют на уровень уверенности в процессе принятия решения, которые связаны с риском. Таким образом, исследования показывают, что женщины-инвесторы чаще сталкиваются с опасностью неэффективного финансового поведения из-за меньшей осведомленности и уверенности в инвестировании, чем мужчины.

Но в то же время с помощью тестирования на эффект опосредования было обнаружено, что более высокий уровень объективного знания усиливает субъективное знание и также повышает уровень принятия риска. Другими словами, субъективное знание, которое отражает уверенность в себе в процессе обработки информации, может быть самым важным фактором принятия риска инвестором. Эти результаты не согласуются с теорией, представленной Шефриным, потому что он придает особое значение необходимости быть осторожными, оценивая собственные способности в процессе принятия решений. Мы склонны к тому, что обе точки зрения являются правильными, а степень уверенность в себе должна зависеть как от масштаба потенциальной прибыли и потерь, так и от важности поставленной в данный момент цели.

Вследствие идеи о высоком уровне корреляции между объективным знанием, субъективным знанием и принятием риска инвестора стоит добавить, что субъективное восприятие объективной информации тоже имеет значение. С одной стороны, люди могут иметь одинаковый доступ к правильным объективным финансовым сведениям. С другой стороны, их ощущение этой информации может быть довольно разным. Поэтому результаты управления в одинаковых условиях будут разными. Понимание риска, отношение к риску и финансовые решения инвесторов зачастую не совпадают. Концепция системы финансовых знаний индивида зависит от того, как информация представлена.

Многие эксперименты демонстрируют, что самые весомые факторы риска связаны с перспективой очень больших потерь вложенных денег, ощущением потери контроля над потоком инвестиций и вероятностью того, что купленные активы не вырастут в цене и, таким образом, запланированная прибыль не будет получена. В силу важности способа представления информации участникам финансовых отношений и влияния

его на принятые инвесторами решения возможно создание адекватной системы управления инвестициями, которая будет учитывать восприятие риска человеком. К примеру, посредством финансовых советников и оптимизационных моделей применение такой системы может быть более эффективным по сравнению с традиционными.

1.2.2. Проблема принятия инвестиционных решений с точки зрения практики поведенческих финансов

Современные финансы – это набор теорий, которые не подтверждаются практикой, и практика, которая не объясняется существующими теориями. Правило чистой приведенной стоимости, фундаментальная теория инвестирования, теория эффективных фондовых рынков, современная теория портфельного инвестирования, модель CAPM, синергетическая теория слияний и поглощений – вот лишь несколько теорий, чья практическая значимость с каждым днем внушает все более серьезные опасения.

Отмечая, что торговый оборот на финансовых рынках сегодня по-прежнему исчисляется миллиардами долларов, эксперты утверждают, что управляющие компании в области управления капиталом все активнее прибегают к использованию концепции поведенческих финансов в своей работе, стремясь восстановить доверие своих клиентов.

Подтверждением этого может служить то, что сразу несколько ведущих мировых финансовых институтов, включая Merrill Lynch, Northern Trust и JP Morgan Chase, сегодня активно внедряют стратегии поведенческих финансов в свой повседневный бизнес, хотя каждый из них делает это по-разному.

Члены мирового финансового сообщества на всех уровнях сходятся во мнении, что одним из самых глубинных следствий нынешнего кризиса стало возрастающее значение разнообразных «эмоциональных факторов» в процессе принятия решений инвесторами, владеющими инвестиционными активам на сумму от 1 миллиона долларов.

Разработанная в 1970-е и 1980-е гг. учеными-теоретиками, в числе которых были Амос Тверски, Дэниел Канеман, Ричард Тейер и Мейр Статман, теория поведенческих финансов строится на постулате о том, что в определенные моменты психология и эмоции заставляют инвесторов вести себя иррационально с точки зрения современной теории портфельных инвестиций.

Эта концепция сегодня получила серьезное развитие и достигла такого уровня, когда более широкое использование поведенческих финансов в инвестиционном процессе будет оказывать существенное влияние

на модели и платформы доставки клиентских сервисов. Управляющие компании в области менеджмента частным богатством могут получить конкурентное преимущество на рынке благодаря включению концепции поведенческих финансов в свои инвестиционные стратегии, поскольку это повышает качество управления портфелем и моделей оценки риска, а также расширяет их возможности.

Растущий интерес к поведенческим финансам можно расценить как смену парадигмы в подходах к формированию структуры инвестиционных портфелей. Поведенческие финансы вскрывают недостатки и несоответствия теории современного инвестиционного портфеля, когда она используется в отношении реальных клиентов в реальном мире, открывая возможность создания более эффективной модели размещения активов в инвестиционном портфеле.

Как следствие, глобальный финансовый рынок сегодня находится на стратегическом рубеже развития, с которого начинается движение от современной теории инвестиционного портфеля в направлении новой эпохи целевого планирования.

Концепция «неприятия потерь» (loss aversion), в рамках которой инвесторы воспринимают риск получить убытки от своей инвестиционной деятельности как неприемлемый, считается важнейшей составляющей этого перехода к новой парадигме. На базе этой концепции строится большинство поведенческих моделей оптимизации финансового портфеля на рынке ценных бумаг.

В отличие от теории современного инвестиционного портфеля, исходящей из пропорциональной зависимости между доходностью и риском, теория поведенческих финансов учитывает психологию рынков и выявляет наличие асимметрии между размером инвестиционной прибыли и уровнем риска. Когда «неприятие потерь» учтено, модели начинают использоваться более осознанно.

По большей части иррациональное поведение рынка является следствием недостаточной или чрезмерной реакции инвесторов в отношении той или иной ценной бумаги. Эта идея работает таким образом, что если аналитик или индивидуальный инвестор приходят к выводу, что недостаточная или избыточная реакция является иррациональной, они покупают или продают этот актив, действуя «против» рынка, для того, чтобы воспользоваться «стоимостной аномалией».

Примером чрезмерной реакции может служить массовая распродажа акций и сильное падение рыночной капитализации компаний, связанных с British Petroleum, после аварии на глубоководной платформе Deepwater Horizon и разлива нефти в Мексиканском заливе.

Торговля на фондовом рынке, основанная на «шуме», противопоставляется торговле, основанной на своевременной и достоверной информации. Если участники рынка в своих действиях исходят из непроверенных данных и слухов, пользуются советами «экспертов», на самом деле таковыми не являющихся, значит они – «шумовые трейдеры». Они осуществляют торговые сделки, принимая «шум» за информацию, не имея настоящей информации или просто потому, что, по выражению Блэка, «им нравится торговать», поведение их является нерациональным. Именно наличие на рынке элемента «шумовой торговли» обуславливает возможность существования рынка и осуществления торговых сделок. Если бы рыночные цены являлись результатом адекватной информации, на рынке невозможно было бы получить дополнительную прибыль, торговля потеряла бы смысл [36, 37].

В соответствии с этой теорией на рынке также обязательно должны присутствовать и рациональные участники, так называемые «информационные трейдеры». Если рассматривать рынок в целом, «шумовые трейдеры» оказываются в убытках, тогда как «информационные трейдеры» получают прибыль. При этом последние в своих действиях учитывают, естественно, и поведение «шумовых», нерациональных участников рынка и торгуют в большей степени с ними, чем с такими же, как они – «информационными трейдерами».

Предположения теории шумовой торговли противоречат практически всем важнейшим теориям классических финансов. Но в ее рамки укладываются фондовая практика и все, что происходит на рынке, хотя само поведение рынка оказывается практически непредсказуемым.

В традиционной задаче распределения активов в портфеле уровень принятия риска, ограничения и финансовые цели устанавливаются однократно, результаты даны посредством mean-variance оптимизации. К сожалению, этот подход не отвечает требованиям действительности для инвесторов, которые восприимчивы к поведенческим отклонениям (предубеждениям). К примеру, в связи со спекулятивными движениями рынка и ущерба долгосрочным инвестиционным планам индивидуальные инвесторы могут пересматривать портфель. Это указание на то, что ранний перевод активов в наличные средства может стать причиной импульса (простейший технический индикатор, который рассчитывается как отношение или разница между текущей ценой и ценой n периодов назад).

Если говорить об эмоциональных предубеждениях, то эмпирические исследования показали, что, когда речь идет о прибыли, инвестор не расположен к риску, но, когда альтернативы включают в себя и потери, действия инвестора становятся слишком рискованными (асимметрия воспри-

ятия прибыли и потерь в поведении инвесторов). Более того, в более широком выборе активов люди значительно менее расположены к потерям, чем к привлечению прибыли таких же размеров. Непринятие потерь – это существенная психологическая концепция, которая была адаптирована к финансовому и экономическому анализу и теперь представляет основу теории перспектив. Господствующая парадигма индивидуального поведения в финансовой теории основана на постулатах максимизации ожидаемой полезности и неприятии риска, которые терпят нападки в последнее время из-за наглядных ошибок. Практическая психология демонстрирует, что люди систематически отклоняются от прогнозируемого выбора, который предсказывает классическая теория, так как индивидуумы типично предвзяты в своем восприятии реальных фактов.

На основании исследований, проведенных на рынках США и Канады, зарубежные ученые установили статистически достоверную корреляционную связь между профессиональными психологическими качествами трейдера и успешностью его профессиональной деятельности [38]. В соответствии с этой теорией залогом успеха на рынке является наличие у потенциального инвестора следующих черт характера:

- отсутствие желания подчинить себе рынок и контролировать его;
- способность чувствовать индивидуальный «барьер риска», т. е. предельные значения величины риска, который инвестор может на себя принять, и предельные значения капитала, которым он может рисковать без фатальных последствий;
- способность действовать вне зоны психологического комфорта, т.е. принимать обдуманные и адекватные решения, даже если ситуация развивается не так, как инвестор предполагал вначале;
- способность учитывать селективность восприятия и памяти;
- способность распознавать у себя состояние стресса и вырабатывать защитные механизмы против необдуманных действий в таком состоянии, дистанцироваться от личных эмоций и переживаний;
- наличие у инвестора адекватной самооценки;
- способность учитывать влияние негативных установок, склонностей и предрасположенностей;
- умение избегать психологической привязанности к конкретным финансовым инструментам;
- способность отказаться от сиюминутной прибыли ради долгосрочной перспективы;
- наличие выдержки и терпения;
- умение планировать несколько (зачастую противоположных) вариантов развития событий на фондовом рынке;

- умение сфокусироваться на цели и постоянно действовать на основе принятого решения;
- навыки работы с большими массивами информации с целью избежать психологических перегрузок;
- отсутствие психологической зависимости от трейдинга.

Перечисленные качества позволяют справляться с отрицательными последствиями ошибок восприятия информации и эмоциональных факторов, вызывающих отклонения от рационального поведения на рынке.

Портфель, сформированный инвестором, чей выбор согласуется с теорией перспектив, будет ключевым образом отличаться от портфелей традиционных (рациональных) инвесторов, чей выбор сделан соответственно теории ожидаемой полезности или современной портфельной теории. В целом характер поведенческих портфелей заключается в том, что они комбинируют очень надежные ценные бумаги с очень рискованными, при этом портфель хорошо диверсифицирован. В этом ключе оптимальное решение проблемы портфельного выбора должно подсказывать инвесторам принятие такого решения, которое стоит на службе их наибольшего интереса. Это должны быть предписания или правила портфельного выбора, которые соответствуют естественным предпочтениям и образу мыслей инвестора (эмоциональные склонности), даже если такой подход не будет максимизировать ожидаемые финансовые результаты при заданном уровне риска. Проще говоря, лучшее распределение инвестиций на практике может быть сделано посредством слегка недооцененной долгосрочной программы, которую инвестор может воплотить комфортно. С точки зрения mean-variance оптимизации поведенческий инвестор выбирает портфель, стохастически доминируемый. Это не означает, что индивидуальный инвестор иррационален по разным ощущениям: для людей не является иррациональным то, что они предвосхищают свои эмоциональные реакции и принимают их во внимание в процессе принятия решений и стараются привести свой выбор в соответствие со своими предпочтениями или установками. Тем не менее портфельные менеджеры испытывают недостаток в рекомендациях, необходимых для совмещения этих поведенческих склонностей в процессе принятия решения о покупке финансовых активов.

Однако портфельные управляющие жалуются на нехватку современных методик, необходимых для объединения (соединения) этих склонностей в процессе размещения финансов в активах. Мы адресуем эту проблему поиска новых подходов к выбору финансового портфеля управляющим, которые либо должны умирять образ естественного поведения клиентов, препятствующий эффективному принятию решения, посредством

предопределения размещения активов, либо им следует создать стратегию распределения активов, которая адаптирует клиентские склонности таким образом, что клиенты могли комфортно для себя придерживаться программы инвестирования.

В общих словах теория перспектив и ее последующая версия – кумулятивная теория перспектив – постулирует четыре новые концепции в системе индивидуальных риск предпочтений. Первая: инвесторы оценивают активы согласно выигрышам и потерям, а не согласно конечному богатству (ментальный учет). Вторая: индивидуумы менее расположены к потерям, чем привлечены выигрышами (избегание потерь). Третья: индивидуумы более расположены к риску в области потерь и избегают риска в области выигрышей (асимметрия риск предпочтений). Последняя: индивидуумы взвешивают предельные вероятности, трансформируя их таким образом, что низкие вероятности переоцениваются, а высокие вероятности недооцениваются в зависимости от составляющей риска в конкретной ситуации выбора (функция взвешенной вероятности) [14].

В финансовой литературе возникает конфликт результатов, полученных в отношении того, как предшествующие исходы влияют на принятие риска инвестором в последующих периодах. Учет эффекта избегания потерь предсказывает тот факт, что трейдеры, торгующие в плюсе утром, будут сокращать свои позиции в предчувствии дневного риска, стараясь избежать потери и, таким образом, гарантировать свой предыдущий выигрыш [39]. Инвесторы, скорее, готовы продать акции, которые торгуются выше цены покупки (победители), чем акции, которые торгуются ниже цены покупки (проигравшие) – явление так называемого эффекта распоряжения [40]. Обе работы интерпретируют это поведение как свидетельство того, как снижается негативное отношение к риску после потерь и увеличивается после выигрыша. Это стандартное объяснение предшествующего поведения основывается на теории перспектив и в особенности на том факте, что индивидуумы ищут риск в области потерь и не расположены к риску в области выигрышей (асимметрия предпочтений риска).

Используя знания, представленные выше, можно сделать вывод, что поведенческий риск существует. С одной стороны, его природа связана с психологией человека и индивидуальным восприятием риска. С другой стороны, эта особенность влияет на реальный уровень риска инвестиций и финансовые результаты. В терминах теории поведенческих финансов можно сформулировать определение «поведенческого риска».

Поведенческий риск – это вероятность появления неопределенных событий или условий, которые являются результатами системы поведения

инвесторов и несовершенств рынка, испытывающего влияние, которое противоречит ожиданиям.

Многие исследователи предполагают, что инвестор действует близко-руко, руководствуясь ощущением того, что он уменьшает долгосрочное благосостояние, когда оценивает его полезность, и что отправная точка, относительно которой он измеряет свои выигрыши и потери за первый период – это его начальное вложение.

Другая хорошо известная проблема в распределении активов с использованием оптимизации Марковица состоит в том, что результат инвестирования слишком сильно зависит от оценки риска/доходности актива и отбор его по этим критериям в портфель. Самая распространенная проблема применения этой техники – проблема замещения, когда выбор стоит между двумя активами с одинаковым риском, но слегка различающимися ожидаемой прибылью. Оптимизатор будет давать весь вес активу с более высокой ожидаемой прибылью, ведущий к очень нестабильному распределению активов. Для нивелирования данной ошибки ученые внедряют интеллектуальную методику оценки риска в проблему поведенческого портфельного распределения.

Современные исследования стараются преодолеть проблему классических моделей управления портфелями, которые невозможно создать в реальных условиях. Основной фокус этих моделей направлен на создание реальных портфелей, учитывая то, что оценки риска и доходности не детерминистические, а стохастические. Следует заметить, что отсутствие детализации ожидаемых доходов гораздо более критично, чем их дисперсия.

В конечном итоге был разработан новый подход к выбору портфеля с целью визуализации приблизительной оценки ошибки в традиционном методе оптимизации портфеля, более удобный для инвестиционных аналитиков. Унифицированная методика отбора из многомерного нормального распределения (параметрический метод, названный симуляцией по методу Монте-Карло) в настоящее время является путем к решению проблемы оценки ошибки выбора оптимального портфеля. Сравнение результатов применения традиционного подхода к повторной выборке и данного подхода позволило сделать выводы об успешности последнего.

Прочие исследователи [41, 42] оценивают несколько моделей распределения активов и предполагают, что методы повторной выборки обычно предлагают лучшие результаты. Они представляют новый подход внедрения поведенческих склонностей и приблизительной оценки риска в дисперсионный выбор портфеля (отрегулированная техника поведенческой повторной выборки). В результате чего была предложена модель для

оценки портфельного выбора с избеганием потерь, с поведением асимметричного принятия риска и отделением безрисковых возможностей. Полученные данные позволили предполагать, что изменения в портфельных весах критично зависят от зафиксированной точки отсчета и соотношения между этой точкой и текущим богатством и, таким образом, опосредованно зависит от поведения рискованных активов.

На основе описанных исследований, их результатов и детального рассмотрения всех новых аспектов теории перспектив (ментального учета, избегания потерь, поведения асимметричного принятия риска и функции вероятностных весов решений) появилась возможность создания поведенческих моделей оптимизации выбора портфеля на рынке ценных бумаг. Такие модели оценивают неэффективную стоимость поведенческих склонностей и предлагают форму расчета доходности рискованных активов, приближенную к реальности, включая примерную оценку риска в анализе.

Не имеет значения, как именно поведенческие финансы находят свое применение в инвестиционных стратегиях на практике, совершенно ясно, что эта концепция окончательно и бесповоротно вошла в нашу жизнь. Использование поведенческих финансов стало глобальным социально-экономическим трендом, благодаря которому появятся значительные возможности для роста и трансформации этой индустрии. Тем не менее компании, которые более глубоко инкорпорируют концепцию поведенческих финансов в различные инвестиционные процессы и организационные модели, должны демонстрировать более стандартизированный, масштабируемый и эффективный подход, иначе он окажется неустойчивым во времени или неприбыльным.

1.3. Теория перспектив

Теория перспектив (РТ) – это поведенческая экономическая теория, которая описывает принятие решения в выборе между двумя альтернативами, которые связаны с риском, для которых вероятности исходов известны. Она была разработана как описательная модель принятия решения в условиях неопределенности психологом Даниэлем Канеманом и экономистом Амос Тверски и опубликована в журнале «Эконометрика» в 1979 году [14]. Авторы провели серию экспериментов для того, чтобы идентифицировать манеру, в которой люди делают выбор в условиях риска. Теория гласит, что люди принимают решения, основываясь на потенциальном значении потерь и выигрышей, а не на конечном финансовом

результате, а также что люди оценивают эти потери и выигрыши используя эвристику. Хотя оригинальная формулировка теории перспектив была определена только для розыгрышей с двумя ненулевыми исходами, она может быть обобщена и для n исходов. Обобщение было использовано различными исследователями (см., например, [43–46]).

Выбор по оригинальной РТ состоит из двух фаз. Во время первой фазы, которая называется «фазой исправление» (эдитинг), агент определяет свое собственное (субъективное) значение выигрыша и проигрыша посредством установления референтной точки r_0 для доходности портфеля ценных бумаг, которая отражает нулевой выигрыш (или нулевой проигрыш) для конкретно взятого лица. Во время второй фазы, которая называется «фаза оценки», инвестор высчитывает значение полезности по теории перспектив, основанной на потенциальных исходах и их соответствующих вероятностях, и в итоге выбирает максимальную.

В этом параграфе помимо оригинальной версии теории перспектив мы также рассмотрим ее дополненную версию под названием «кумулятивная теория перспектив» (СРТ), разработанную в 1992 г. Тверски и Канеманом [47]. Согласно авторам, СРТ может быть приложена не только для дискретных, но и для непрерывных распределений, а также она позволяет включение различных весов решений для выигрышей и проигрышей. Однако некоторые исследователи убеждены, что СРТ с описательной точки зрения может быть не столь полезной, как РТ (см., например, [9]). В данной монографии мы изучаем результаты работы обеих версий (РТ и СРТ) в целях выявления лучшей для различных типов экспериментальных данных согласно нескольким критериям.

Необходимо уточнить, что только некоторые исследования РТW содержат численные результаты. Это объясняется расчетными проблемами, которые связаны со сложностью целевой функции РТW. Поэтому только простейшие случаи (2–3 искусственно созданных актива) проблемы выбора портфеля доступны в научной литературе. Среди них исследования теории перспектив [14, 41, 42, 48, 49], а также исследования кумулятивной теории перспектив [8, 50–53]. Более того, насколько нам известно, все перечисленные работы основаны на предположении о нормальном распределении тестируемых данных. Однако многие проблемы размещения активов включают в себя распределения доходностей, отличные от нормального в силу того, что котировки финансовых активов или ценных бумаг обычно характеризуются тяжелыми «хвостами», асимметрией и эксцессами. Наше исследование преследует цель восполнить этот пробел и применить данные с распределением, приближенном к реальным рыночным условиям и ситуациям.

Очевидно, что недостаток экспериментальных численных данных для (кумулятивной) теории перспектив в литературе ограничивает дальнейшее исследование данных моделей. Проведение сравнительного анализа традиционных подходов (например, модель Марковица) и поведенческих подходов (например, РТ и СРТ) способствует изучению и развитию прикладного аспекта моделей. Первая попытка сравнить эти модели была предпринята в 2004 году [42]. Идея состояла в том, чтобы выбрать портфель с наивысшей полезностью по теории перспектив среди других портфелей на эффективном фронте Марковица. Следуя этому пути, Пирву и Шульц в 2012 г. представили результаты, подтверждающие, что аналитическое решение в целом эквивалентно максимизации целевой функции СРТ по эффективной границе Марковица [8]. В нашей работе мы сравниваем результаты обоих подходов независимо друг от друга, используя различные типы данных, моделирование и симуляционные тесты.

Далее мы формулируем математически обе модели, РТ и СРТ, с ограничением и без ограничения на кардинальность.

1.3.1. Формулировка модели теории перспектив

Рассмотрим игру:

$$(r_{-m}, p_{-m}), (r_{-m+1}, p_{-m+1}), \dots, (r_0, p_0), \dots, (r_{n-1}, p_{n-1}), (r_n, p_n), \quad (1.17)$$

где (r_s, p_s) , $s = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, n-1, n$, обозначает, что игрок выиграл r_s с вероятностью p_s , конечно, сумма всех вероятностей равна 1, т. е. $\sum_{s=-m}^n p_s = 1$; r_0 обозначает некоторую численную границу под названием референтная точка (постоянная), которая зависит от предпочтений инвестора. Пусть r_s определяет исход игры (1.17) так, что:

- если $s = 0$, т. е. $r_s = r_0$, тогда выигрыш инвестора 0,
- если $s > 0$, тогда $r_s > r_0$, следовательно инвестор выиграл от такой инвестиции,
- если $s < 0$, тогда $r_s < r_0$, следовательно инвестор проиграл.

Согласно теории перспектив, необходимо учитывать дополнительные психологические аспекты принятия решения инвесторами, которые отражаются на оригинальных функциях вероятности p и значениях исхода r , что эквивалентно замене стандартной функции полезности на функцию полезности теории перспектив. В этих целях мы трансформируем оригинальные p и r в весовую функцию вероятности по теории перспектив $\pi(p)$ и функцию субъективной ценности теории перспектив $v(r)$.

Рис. 1.1 [14] содержит график функции субъективной ценности теории перспектив $v(r)$.

Весовая функция вероятности по теории перспектив $\pi(p)$ измеряет, согласно [14], «влияние событий на желанность перспектив, а не только воспринимаемую вероятность этих событий»*, т. е. выражает веса решений в вероятностях. Необходимо отметить, что $\pi(p)$ – это возрастающая функция, $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = 1$, и для очень малых значений вероятности p мы имеем $\pi(p) \geq p$. Весовая функция вероятности основана на наблюдении, что большинство людей склонны переоценивать малые вероятности и недооценивать большие вероятности.

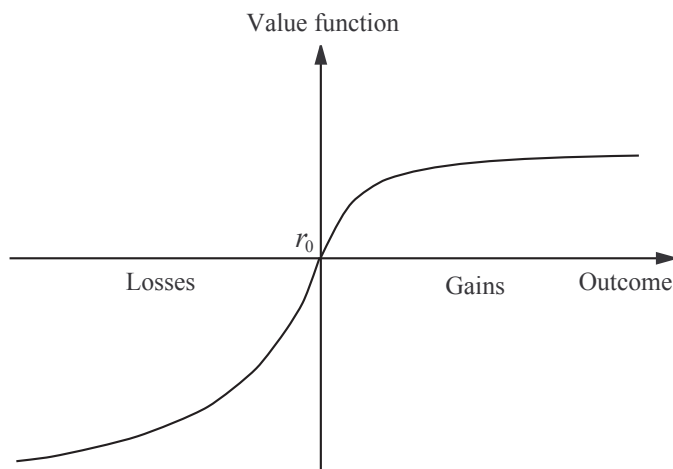


Рис. 1.1. Функция субъективной ценности теории перспектив $v(r)$
с $\alpha = \beta = 0.88$ и $\lambda = 2.25$ [14]

Функция субъективной ценности по теории перспектив $v(r)$ описывает (поведенческое) значение выигрышного/проигрышного исхода игры (инвестиции). Канеман и Тверски экспериментально получили значение функции, которая зависит от начального значения отклонения. Эта функция обычно асимметрична относительно референтной точки r_0 (которая отражает различное отношение инвестора к выигрышам и проигрышам), она вогнутая в верхней части графика для выигрышей и выпуклая в нижней части графика для проигрышей. Более того, в целом весовая функция

*Перевод автора.

$v(r)$ растет круче для проигрышей, чем для выигрышей, т. е. для $s > 0$ мы имеем $v(r_s) \leq -v(r_{-s})$.

Явная формула для функции субъективной ценности теории перспектив $v(r)$ дана в [47] и имеет вид

$$v(r) = \begin{cases} (r - r_0)^\alpha, & \text{если } r \geq r_0, \\ -\lambda (r_0 - r)^\beta, & \text{если } r < r_0, \end{cases} \quad (1.18)$$

где $\alpha = \beta = 0.88$ – это коэффициенты избегания риска относительно выигрышей и проигрышей соответственно, $\lambda = 2.25$ – это коэффициент избегания потерь, который подчеркивает разницу восприятия инвестором дохода и убытка. Мы отмечаем, что функция субъективной ценности (1.18) является нелинейной относительно доходности r .

Явно, что формула (1.18) состоит из двух частей. Одна часть в области выигрышей (т. е. когда $r \geq r_0$) является вогнутой и вторая часть в области потерь (т. е. когда $r \leq r_0$) является выпуклой, отражая тенденцию избегания риска при выигрыше и желания рискнуть при проигрыше, как было замечено многими инвесторами при принятии решений [9]. Необходимо отметить, что в целях упрощения в нашем исследовании мы используем $\pi(p) = p$.

Функция полезности теории перспектив может быть записана с использованием π и v как

$$PT_U = \sum_{s=-m}^n \pi(p_s) v(r_s) = \sum_{s=-m}^n p_s v\left(\sum_{i=1}^N r_{si} \omega_i\right). \quad (1.19)$$

Очевидно, что функция полезности теории перспектив (1.19) является нелинейной функцией.

Модель теории перспектив преследует цель найти лучший (оптимальный) портфель, который максимизирует функцию полезности теории перспектив, где переменные принятия решения – это веса ω доступных активов в портфеле при ограничении на желаемый уровень доходности, на бюджет и короткие продажи. Это нелинейная и невыпуклая оптимизационная модель, так как целевая функция является нелинейной и невыпуклой. Для того чтобы решить эту задачу, мы используем эвристику, которая является неточным подходом к решению.

Согласно теории перспектив, проблема выбора портфеля может быть сформулирована следующим образом:

$$PT(x) = \sum_{s=1}^S p_s v\left(\sum_{i=1}^N r_{si} \omega_i\right) \rightarrow \max, \quad (1.20)$$

при ограничениях

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.21)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.22)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.23)$$

Далее мы приведем некоторые математические свойства модели теории перспектив.

1) Полнота:

для всех портфелей x_1, x_2 $x_1 \succeq x_2$ или $x_2 \succeq x_1$.

2) Транзитивность:

$$x_1 \succeq x_2, \quad x_2 \succeq x_3 \Rightarrow x_1 \succeq x_3.$$

3) Независимость:

$$\forall x_1, x_2, x_3 \quad \forall \zeta \in (0, 1) : x_1 \succ x_2 \Leftrightarrow \zeta x_1 + (1 - \zeta)x_3 \succ \zeta x_2 + (1 - \zeta)x_3.$$

Более подробную информацию о свойствах модели теории перспектив и доказательства свойств, представленных выше, см. в [47] и [54].

1.3.2. Формулировка модели кумулятивной теории перспектив

Рассмотрим игру (1.17) со следующим условием:

$$r_1 \leq \dots \leq r_k \leq r_0 \leq r_{k+1} \leq \dots \leq r_S,$$

т. е. все исходы игры $(r_1, \dots, r_S)$ расположены в восходящем порядке. Следовательно, для $j = 1, \dots, k$ проигрыш составляет $r_0 - r_j$ и для $j = k + 1, \dots, S$ выигрыш составляет $r_j - r_0$.

Введем весовую функцию вероятности π , которая является строго возрастающей на $[0, 1]$, $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = 1$. Для каждой перспективы j мы определяем веса положительных перспектив π^+ и веса отрицательных перспектив π^- в зависимости от соответствующих исходов. Определим весовые функции вероятностей π^- и π^+ , которые описывают веса решений для выигрышей и проигрышей:

$$\pi^-(p_j) = \frac{p_j^\delta}{(p_j^\delta + (1 - p_j)^\delta)^{1/\delta}}, \text{ где } j = 1, \dots, k, \quad (1.24)$$

и

$$\pi^+(p_j) = \frac{p_j^\gamma}{(p_j^\gamma + (1-p_j)^\gamma)^{1/\gamma}}, \text{ где } j = k+1, \dots, S, \quad (1.25)$$

где $\delta, \gamma \in (0, 1)$ отражает числовое значение переоценки или недооценки вероятности каждого из исходов игры в зависимости от домена – проигрыша или выигрыша. Эти весовые функции вероятности $\pi^-(\cdot)$ и $\pi^+(\cdot)$ описывают переоценивание малых вероятностей, если мы кладем $\delta = 0.61, \gamma = 0.69$ в соответствии с [47]. Рис. 1.2 [47] иллюстрирует весовую функцию вероятности для кумулятивной теории перспектив.

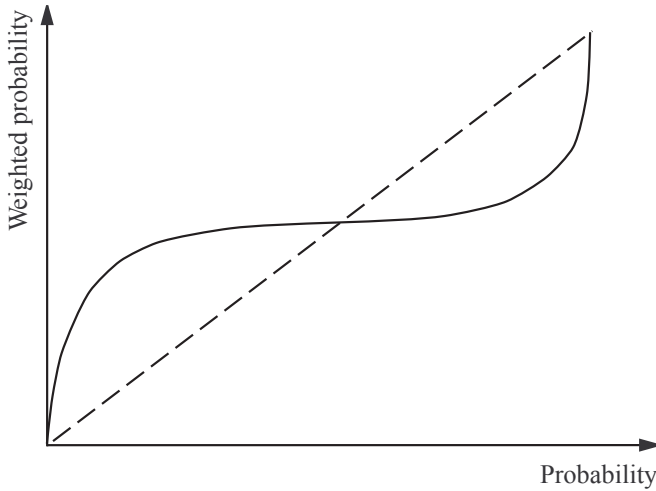


Рис. 1.2 Весовая функция вероятности кумулятивной теории перспектив w [47]

Необходимо отметить, что в модели теории перспектив $\pi^+ = \pi^-$, таким образом, теория перспектив предполагает, что веса решений для выигрышей и проигрышей равны. В связи с этим мы можем рассматривать CPT как частный случай теории перспектив.

Тогда проблема оптимизации портфеля для модели кумулятивной теории перспектив (CPT) может быть сформулирована как

$$\text{CPT}(x) = \sum_{s=1}^S \pi(p_s) v \left(\sum_{i=1}^N r_{si} \omega_i \right) \rightarrow \max, \quad (1.26)$$

при ограничениях

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.27)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.28)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.29)$$

где

$$\pi(p_s) = \begin{cases} \pi^- \left(\sum_{j=1}^s p_j \right) - \pi^- \left(\sum_{j=1}^{s-1} p_j \right), & s = 1, \dots, k, \\ \pi^+ \left(\sum_{j=s}^S p_j \right) - \pi^+ \left(\sum_{j=s+1}^S p_j \right), & s = k+1, \dots, S, \end{cases} \quad (1.30)$$

где p_j – вероятность исходов.

Здесь k – порядковый номер каждого исхода в восходящей последовательности всех исходов.

$$r_1 \preceq \dots \preceq r_k \preceq r_0 \preceq r_{k+1} \preceq \dots \preceq r_S, \quad (1.31)$$

и $v(r(x))$ – это функция субъективной ценности, которая определяется по следующей формуле:

$$v(r(x)) = \begin{cases} (r(x) - r_0)^\alpha, & \text{если } r(x) \geq r_0, \\ -\lambda (r_0 - r(x))^\beta, & \text{если } r(x) < r_0. \end{cases} \quad (1.32)$$

Необходимо отметить, что СРТ модель обладает всеми математическими свойствами модели теории перспектив, описанными в п. 1.3.1, а именно полнота, транзитивность и независимость. Она также имеет очень важное свойство – стохастическое доминирование отношений предпочтения [55], т. е. если для портфелей x_1 и x_2 справедливо $r_j(x_1) \succeq r_j(x_2) \quad \forall j$ и $r_j(x_1) \succ r_j(x_2)$, хотя бы один j с вероятностью $p_j > 0$, тогда $(r_1(x_1), p_1(x_1); \dots; r_n(x_1), p_n(x_1)) \succeq (r_1(x_2), p_1(x_2); \dots; r_n(x_2), p_n(x_2))$.

1.3.3. Модель теории перспектив с ограничением на кардинальность

Следуя логике и обозначениям, введенным в п. 1.1.2, мы формулируем модель теории перспектив с ограничением на кардинальность следующим образом:

$$\text{PT}_{\text{cc}}(x) = \sum_{s=1}^S p_s v \left(\sum_{i=1}^N r_{si} \omega_i \right) \rightarrow \max, \quad (1.33)$$

при ограничениях

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.34)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.35)$$

$$l_i \varphi_i \leq \omega_i \leq u_i \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.36)$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \leq K, \quad (1.37)$$

$$\varphi_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.38)$$

1.3.4. Модель теории перспектив для слежения за индексом

Изучая проблему теории перспектив, можно заметить, что принципы этой модели очень схожи с принципами проблемы оптимизации портфеля слежения за индексом. Главная общая черта состоит в том, что поведенческие портфельные модели, описанные в нашей работе, используют референтную точку как ограничение на желаемый уровень дохода для каждого временного периода, что схоже с моделью слежения за индексом, где индекс представлен в качестве референтной точки. Таким образом, легко можно воплотить идею проблемы слежения за индексом в модели теории перспектив путем изменения значения референтной точки. В данном случае пусть r_0 будет не скалярным, как заявлено в оригинальной версии (кумулятивной) теории перспектив, а векторным, отражая значения индекса для каждого временного периода данных. Также необходимо убрать ограничение на желаемый уровень средней доходности портфеля (на конец инвестиционного периода) так же, как и в проблеме слежения за индексом, которая фокусируется на значении индекса в качестве уровня доходности для каждого временного периода. Полученную проблему будем называть моделью теории перспектив со слежением за индексом (РТ с ИТ).

Мы также вводим ограничение на кардинальность в новую модель для того, чтобы изучить проблему слишком диверсифицированного портфеля. Очень интересно сравнить не только модели ИТ и РТ со слежением за индексом, но и эти же модели, только с ограничением на количество активов в портфеле. Мы формулируем модель теории перспектив со слежением за индексом и с ограничением на кардинальность как:

$$PT+IT_{cc}(x) = \sum_{s=1}^S p_s v \left(\sum_{i=1}^N r_{si} \omega_i, rm_s \right) \rightarrow \max, \quad (1.39)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.40)$$

$$l_i \varphi_i \leq \omega_i \leq u_i \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.41)$$

$$\sum_{i=1}^N \varphi_i \leq K, \quad (1.42)$$

$$\varphi_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.43)$$

где

$$v(r(x), rm_s) = \begin{cases} (r(x) - rm_s)^\alpha, & \text{если } r(x) \geq rm_s, \\ -\lambda (rm_s - r(x))^\beta, & \text{если } r(x) < rm_s. \end{cases} \quad (1.44)$$

Как можно заметить, в уравнении (1.44) функция субъективной ценности для модели теории перспектив со слежением за индексом определена как динамическая, а не постоянная, согласно тому, что вместо постоянной референтной точки r_0 здесь мы используем векторный показатель rm , который принимает различные значения в каждом сценарии (временном периоде).

1.4. Меры риска

Концепция риска занимает одну из ключевых позиций в проблеме выбора портфеля ценных бумаг. Марковиц был одним из первых ученых, кто постулировал зависимость между уровнем риска и доходности. Он предложил минимизировать риск (значение дисперсии) при заданном уровне ожидаемой доходности. Некоторые исследователи предполагали, что достичь нулевой уровень риска возможно (см., например, [3] и другие). Однако правда заключается в том, что риск может быть сокращен при помощи диверсификации, но он не может совершенно исчезнуть без изменения уровня доходности [2].

В нашем исследовании мы рассматриваем симметричную меру риска, а именно дисперсию, и две несимметричные – под названием Value-at-Risk (VaR) и Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Определение 1.1. Дисперсия

Рассмотрим непрерывную случайную величину x с распределением $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$ и ожидаемой доходностью $\mu(X) := E(x) := \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$.

Затем мы определяем дисперсию переменной x как

$$\sigma^2 := \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \quad (1.45)$$

и ее среднеквадратическое отклонение:

$$\sigma := \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (1.46)$$

Ирвинг Фишер был, возможно, первым ученым, который предложил дисперсию как меру риска в своей статье [56] (см. также [2]). Дисперсия как мера риска имеет преимущество будучи математически простой и удобной для расчетов. Как уже обсуждалось ранее, вычислительная простота – это очень важный фактор для проблемы выбора портфеля. Но в данном случае имеются ограничения.

Первое ограничение состоит в отсутствии чувствительности к моментам высших порядков случайной величины (например, к моментам третьего и четвертого порядков – коэффициенту асимметрии и эксцессу). Однако эти характеристики достаточно важны для комплексной оценки риска случайной величины, так как существует множество распределений, которые имеют одинаковую среднюю и дисперсию, но различаются другими характеристиками риска. Иными словами, в рамках модели Марковица невозможно определить и оценить всю сложность риска.

Холтон в своей статье «Определение риска» пришел к выводу, что Марковиц, согласно своему исследованию «Выбор портфеля», возможно, использовал дисперсию в качестве условной меры риска [57]. В научной литературе идея использования дисперсии в качестве меры риска подверглась критике, потому что дисперсия изначально известна как мера неопределенности, что не является риском само по себе.

Другим ограничением называют тот факт, что в рамках модели Марковица выигрыши и потери воспринимаются симметрично. Многие статистические меры риска действуют так же, но их не рассматривают в качестве адекватных для финансов: инвесторы не относятся к выигрышу и проигрышу симметрично [14]. Их интересует «нижняя поддержка риска» (инвестор избегает потери).

Асимметричная природа риска – не единственная причина, почему так важно уделять внимание просадке риска. Если предположить, что финансовые доходности следуют мультивариативному нормальному (или

эллиптическому) распределению, тогда любая мера риска с нижней поддержкой может быть выражена функцией средней арифметической и дисперсии (или любой другой масштабной мерой, где дисперсия не определена). Как следствие, при таких допущениях измерение дисперсии будет достаточным. Эмпирические исследования (см. например, [19] и [20]), однако, демонстрируют, что рыночные доходности, и доходности хедж фондов в особенности, подвержены асимметрии и наличию тяжелых «хвостов», что означает необходимость уделять особое внимание отрицательной просадке финансового результата.

В итоге пренебрежение моментами более высокого порядка, асимметрия риска и распределение доходности, отличное от нормального, делают дисперсию ограниченной мерой риска и не применимой для некоторых случаев оценки риска. Финансы и проблема выбора портфеля требуют альтернативных мер риска, которые способны справиться с этими препятствиями.

Определение 1.2. *VaR*

Пусть r будет специфическим уровнем, с которым значение x заданного портфеля будет сравниваться в конце заданного временного периода. Если $x < r$, тогда получаем убыток, величина которого $r - x$. Тогда убыток портфеля $\tilde{l}$ задается случайной величиной

$$\tilde{l} := r - \tilde{x}, \quad (1.47)$$

где $\tilde{x}$ – случайная величина, характеризующая доходность портфеля.

Вероятность того, что $\tilde{l} \leq l$, задается функцией распределения:

$$F_{\tilde{l}}(l) := P(\tilde{l} \leq l) = \int_{-\infty}^l f_{\tilde{l}}(t) dt. \quad (1.48)$$

Используя распределение потери (1.48) для заданного временного периода и доверительного интервала $1 - \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$, *VaR* для $\tilde{x}$ определяется как

$$VaR(\tilde{x}) := F_{\tilde{l}}^{-1}(1 - \alpha), \quad (1.49)$$

где $(1 - \alpha) \cdot 100\%$ – квантиль распределения потерь портфеля.

Основной причиной распространения меры риска *VaR* является давление регулятора в целях лучшего контроля финансовых рисков, возникших в результате глобализации финансовых рынков, что подвергает финансовые институты большим воздействиям различных источников риска. Также технологическое развитие вносит свой вклад в актуализацию общеорганизационного риск менеджмента [58].

Базель III, выпущенный Комитетом Банковского Надзора Базеля, сосредоточил в себе два года реформ регулятора, включая Базель 2.5. Он ввел новый регулирующий режим для капитала, ликвидности и банковского надзора, где показатель VaR описан как обязательная мера риска.

В научной литературе чаще всего используют доверительные интервалы 95 и 99%. Исследователи не выделяют каких-либо предпочтений, каким уровнем пользоваться для своих моделей и расчетов. Однако в реальном экономическом приложении большинство финансовых институтов выбирают в основном 99% в целях защиты своих инвестиций с большим уровнем надежности.

VaR – это одинарная, суммарная, статистическая мера возможных потерь. Для заданного временного горизонта и доверительного интервала $1 - \alpha$ VaR портфеля – это потеря рыночной цены на временном горизонте, которая может быть превышена портфелем только с вероятностью α .

В сравнении с другими мерами риска VaR представляет собой агрегированный взгляд на риск портфеля, включающий левередж, корреляцию и позиции. VaR может быть применен к различным финансовым инструментам, включая деривативы [58].

Несмотря на то что VaR – очень популярная мера риска, она имеет некоторые математические характеристики, которые не желательны при использовании этой меры для реальных финансовых проблем. Например, она не имеет свойств субаддитивности или выпуклости. Этот недостаток подвергается активной критике, так как, согласно принципу диверсификации современной портфельной теории, субаддитивная мера должна генерировать более низкий уровень измеряемого риска для тех портфелей, которые диверсифицированы, чем те, которые не диверсифицированы [59]. Что касается экономики, то в определенных условиях более полезным будет разделить компанию на две малые, однако мера риска VaR тогда не подходит для таких случаев [60].

Также VaR очень часто используется по отношению к чистым финансовым результатам (прибыль/убыток). Однако стоимость денег не постоянна во времени на финансовом рынке. Это провоцирует игнорирование разницы между монетарной стоимостью в одном временном периоде и стоимостью денег в другом. Но для малых временных горизонтов и единой валюты эта мера риска работает хорошо. Так как VaR использует квантили, необходимо обратить внимание на разрывы и интервалы для квантильных чисел. Но VaR не способен учитывать концентрацию риска [61].

Другая проблема состоит в том, что VaR является адекватной мерой риска, только базируясь на стандартном отклонении нормального распре-

деления. VaR для комбинации из двух портфелей может быть больше, чем сумма риска для отдельных портфелей. Также VaR сложно оптимизировать в ситуации, когда расчеты производятся с использованием сценариев. В отличие от VaR CVaR обладает большими преимуществами, чем VaR в таких случаях [62].

Определение 1.3. CVaR

Пусть $\tilde{x}$ будет случайной величиной, отвечающей за доходность портфеля x на определенном инвестиционном периоде и $A\% = \alpha \in (0, 1)$ – это процент, отражающий выборку худших сценариев для исходов $\tilde{x}$ (так называемый доверительный интервал, обычно определяемый как $\alpha = 0.01$ или $\alpha = 0.05$). Тогда CVaR для специфического уровня α – это «средний убыток в худших $A\%$ случаях» [63], где «убыток» означает отрицательные исходы (финансовые результаты) $\tilde{x}$. Значение CVaR при уровне α для $\tilde{x}$ – это отрицательное значение средней на α -хвосте распределения $\tilde{x}$ (по отношению к экстремальным неблагоприятным исходам) и его функция распределения пересчитывается на отрезке $[0, 1]$:

$$CVaR_{\alpha}(\tilde{x}) := \int_{-\infty}^{\infty} z dF_{\tilde{x}}^{\alpha}(z), \quad (1.50)$$

где

$$F_{\tilde{x}}^{\alpha}(z) = \begin{cases} 0, & \text{if } z > VaR_{\alpha}(\tilde{x}), \\ \frac{F_{\tilde{x}}(z) - \alpha}{1 - \alpha}, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

более подробную информацию см. в [62] или [64].

Существует альтернативное определение CVaR под названием «верхний CVaR», который отражает условное ожидание $\tilde{x}$ при условии, что $\tilde{x} > VaR_{\alpha}(\tilde{x})$:

$$CVaR_{\alpha}^{+}(\tilde{x}) = E[\tilde{x} | \tilde{x} > VaR_{\alpha}(\tilde{x})].$$

Математические свойства CVaR

Пусть $c \in \mathbb{R}$ и $\tilde{y}$, $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ будут случайными величинами, представляющими доходности портфелей y , y_1 и y_2 соответственно, тогда CVaR обладает следующими свойствами [63]:

- 1) монотонность: Если $\tilde{y}_1 \leq \tilde{y}_2$, тогда $CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_1) \leq CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_2)$;
- 2) субаддитивность: $CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \leq CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_1) + CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_2)$;
- 3) трансляционная инвариантность: $CVaR_{\alpha}(\tilde{y} + c) = CVaR_{\alpha}(\tilde{y}) + c$;
- 4) положительная гомогенность (однородность): $CVaR_{\alpha}(c \tilde{y}) = c CVaR_{\alpha}(\tilde{y})$, для $c > 0$;

5) выпуклость: $CVaR_{\alpha}(\lambda\tilde{y}_1 + (1-\lambda)\tilde{y}_2) \leq \lambda CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_1) + (1-\lambda) CVaR_{\alpha}(\tilde{y}_2)$, для $0 < \lambda < 1$.

Известно [65], что свойства 2 и 4 эквивалентны свойству выпуклости. Важно заметить, что VaR не удовлетворяет этим свойствам, что приводит к ограничениям применения этой меры риска.

Комитет Базеля предложил в 2012 г. использовать меру expected shortfall (также известную как CVaR) вместо VaR для измерения рыночного риска. Они предложили перейти от VaR к expected shortfall – мере риска, которая лучше отражает «риск на хвосте» распределения случайной величины доходности [66].

CVaR – это альтернативная мера риска, которая измеряет количественно потери на хвосте распределения случайной величины доходности. CVaR часто используют совместно с VaR, и эта комбинация инструментов может быть применена к оценке риска для несимметричных распределений потерь (с высоким или низким коэффициентом асимметрии). Рис. 1.3 [62] отражает суть VaR и CVaR с точки зрения распределения доходностей.

CVaR и формула ее минимизации впервые были представлены в исследовании Рокафеллера и Урясева в 2000 году. Они показали численно ее эффективность, используя эксперименты, включающие портфельную оптимизацию и опционное хеджирование [62].

Кроме того, ими было показано, что введение ограничения на CVaR в проблему выбора портфеля может дать лучшие результаты, чем введение ограничения на VaR. VaR не показывает степень потерь, которые могут находить за пороговой границей, предложенной VaR. В отличие от VaR CVaR определяет количественно те потери, которые могут находить на хвосте распределения. CVaR – это ожидаемый убыток, дающий потерю, которая больше или равна VaR [67].

Справедливости ради, необходимо привести некоторые имеющиеся недостатки CVaR. Эта мера имеет имплементационные проблемы, поскольку CVaR очень чувствительна к ошибке оценки рыночных наблюдений (более чувствительна, чем VaR, например) и ошибки приближения (эта проблема уникальна для каждого сценария оптимизационной проблемы и не существует в подходе Марковица). Также точность CVaR зависит от точности моделирования хвоста. Дополнительную информацию о прочих недостатках CVaR см. в [68] и [69].

Существует концептуальная проблема CVaR, которая заключается в том, что CVaR не может интегрировать манеру, в которой инвестор рассматривает риск. Причиной является то, что CVaR уравнивает как малые, так и экстремально большие потери, таким образом, эта мера придает

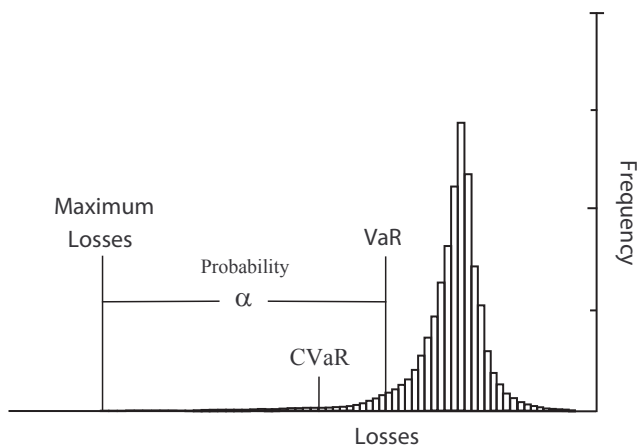


Рис. 1.3. Value-at-Risk и Conditional Value-at-Risk на функции плотности вероятностей доходностей финансового актива [62]

им одинаковый вес с точки зрения расчетов и поэтому не учитывает увеличение избегания риска инвестором в ситуации экстремальных потерь.

CVaR используется в анализе доходность/риск схожим с подходом Марковица (1952) образом. Например, легко вычислить портфель со специфическим уровнем доходности и минимальным CVaR или установить ограничение на CVaR и найти портфель с максимальной ожидаемой доходностью. В дополнение мы можем ввести некоторые ограничения на CVaR одновременно с установлением различных доверительных интервалов (посредством чего формируется распределение потерь). Таким образом, эта мера риска предоставляет гибкий и полезный инструмент измерения и моделирования риска [70].

Одним из основных свойств CVaR с точки зрения применения является то, что CVaR можно выразить в удобной минимизационной (или максимизационной) формуле. Эта формула может быть инкорпорирована в задачу оптимизации в отношении $x \in X$, которая минимизирует риск или формирует его внутри заданных границ. Если рассматриваемая случайная величина дискретная, количество исходов конечное, что может быть представлено в виде различных исходов на различных сценариях, тогда оптимизация CVaR может быть представлена как модель линейного программирования конечной размерности [71].

1.4.1. Mean-CVaR модель

Пусть $r(x)$ будет случайной величиной, которая зависит от вектора решения $x = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in A$, где A – допустимое множество портфелей, $r(x) = \omega_1 r_1 + \dots + \omega_N r_N$.

Рассмотрим функцию [71]:

$$F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha} E \{ [-r(x) + v]^+ \} - v, \quad (1.51)$$

где $\alpha \in (0, 1)$, $[u]^+ = \begin{cases} u, & \text{если } u \geq 0, \\ 0, & \text{если } u < 0. \end{cases}$

Заметим, что:

- 1) функция F_α , определенная на (1.51), является конечной, непрерывной и выпуклой в отношении v и $\text{CVaR}_\alpha(r(x)) = \min_{v \in \mathbb{R}} F_\alpha(x, v)$. Также необходимо отметить, что множество $A_\alpha(x)$ (множество всех значений v такое, что минимум достигнут) является непустым, сплошным (замкнутое и ограниченное) и может состоять из одной точки;
- 2) минимизация CVaR_α в отношении $x \in A$ эквивалентна минимизации F_α в отношении $(x, v) \in A \times \mathbb{R}$, т. е.

$$\min_{x \in A} \text{CVaR}_\alpha(r(x)) = \min_{(x, v) \in A \times \mathbb{R}} F_\alpha(x, v). \quad (1.52)$$

Очень важно отметить здесь, что пара (x^*, v^*) минимизирует правую сторону выражения (1.52) тогда и только тогда, когда x^* минимизирует его левую часть, $v^* \in A_\alpha(x^*)$;

- 3) $\text{CVaR}_\alpha(r(x))$ является выпуклой относительно x так же, как $F_\alpha(x, v)$ является выпуклой относительно (x, v) .

Пусть $r(x)$ будет дискретной случайной величиной с S возможными исходами (сценариями) $r_1(x), \dots, r_S(x)$ с вероятностями $p_1, \dots, p_S$ соответственно. В этом случае пусть референтная точка $r_0 = 0$ и перепишем формулу (1.51) как

$$F_\alpha(x, v) = \frac{1}{\alpha} \sum_{s=1}^S p_s [v - r_s(x)]^+ - v = \frac{1}{\alpha} \sum_{s=1}^S p_s \left[v - \sum_{i=1}^N \omega_i r_{is} \right]^+ - v. \quad (1.53)$$

Тогда мы можем сформулировать mean-CVaR модель для проблемы выбора портфеля [64]:

$$\text{minimise } \text{CVaR}(x) = \frac{1}{\alpha} \sum_{s=1}^S p_s y_s - v, \quad (1.54)$$

при условиях:

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.55)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.56)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.57)$$

$$v - \sum_{i=1}^N \omega_i r_{is} \leq y_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.58)$$

$$y_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.59)$$

где v – это VaR и y_s – это значение убытка, превосходящего значение VaR, для сценария s .

1.4.2. Mean-variance-CVaR модель

Современный подход к проблеме выбора портфеля ценных бумаг часто приводит к возникновению новых математических моделей, которые учитывают различные меры риска одновременно (см., например, [72–75]). В данном пункте мы предложим формулировку проблемы выбора портфеля, в которой случайные величины описываются тремя статистическими показателями [64]: ожидаемой доходностью $E(r(x))$, дисперсией $\sigma^2(r(x))$ и CVaR с обусловленным доверительным интервалом $\alpha \in (0, 1)$. Mean-variance-CVaR модель дает оптимальное решение как компромисс между эффективными фронтами моделей Марковица и mean-CVaR.

Определим отношения предпочтения для случайной величины $r(x)$ с точки зрения mean-variance-CVaR модели следующим образом. Рассмотрим проблему выбора портфеля ценных бумаг со случайными величинами $r(x_1)$ и $r(x_2)$, которые являются доходностями портфелей x_1 и x_2 соответственно, $x_1, x_2 \in A$. Мы полагаем, что $r(x_1) \succeq r(x_2)$ (т. е. портфель x_1 более предпочтителен по отношению к портфелю x_2) тогда и только тогда, если $E(r(x_1)) \geq E(r(x_2))$, $\sigma^2(r(x_1)) \leq \sigma^2(r(x_2))$, $\text{CVaR}_\alpha(r(x_1)) \leq \text{CVaR}_\alpha(r(x_2))$, где, по крайней мере, одно неравенство должно быть строгим [64].

Тогда недоминантное (эффективное) решение модели mean-variance-CVaR – это эффективное решение Парето многокритериальной проблемы, где ожидаемое значение максимизируется одновременно с минимизацией дисперсии и CVaR. В целом эта проблема может быть переписана следующим образом:

$$[E(r(x)), -\sigma^2(r(x)), -\text{CVaR}_\alpha(r(x))] \rightarrow \max \quad (1.60)$$

для $x \in A$ [71].

Рассмотрим проблемы выбора портфеля с S сценариями и N активами. Используя формулу (1.53), мы можем сформулировать модель теар variance-CVaR как

$$MV_{CVaR}(x) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} \omega_i \omega_j \rightarrow \min, \quad (1.61)$$

при ограничениях:

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.62)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.63)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.64)$$

$$v - \sum_{i=1}^N \omega_i r_{is} \leq y_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.65)$$

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{s=1}^S \rho_s y_s - v \leq z, \quad (1.66)$$

$$y_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.67)$$

где $v, (\omega_1, \dots, \omega_N), (y_1, \dots, y_S)$ – переменные решения, z – реальное числовое ограничение на уровень CVaR, которое лежит между $z_{\min}$ (минимально возможный уровень CVaR) и $z_{\max}$ (максимально возможный уровень CVaR) для данной конкретной задачи [64].

1.4.3. Модель теории перспектив с ограничением на CVaR

Модель PT-CVaR – это однокритериальная задача, где функция ожидаемой полезности теории перспектив максимизируется при желаемом уровне доходности и заданном уровне CVaR на распределении доходностей.

Следуя логике п. 1.3.1, модель теории перспектив с ограниченным CVaR формулируется так:

$$PT_{CVaR}(x) = \sum_{s=1}^S \pi_s v_s(r(x)) \rightarrow \max, \quad (1.68)$$

при ограничениях

$$\bar{r}(x) = \sum_{i=1}^N \bar{r}_i \omega_i \geq d, \quad (1.69)$$

$$\sum_{i=1}^N \omega_i = 1, \quad (1.70)$$

$$\omega_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.71)$$

$$v - \sum_{i=1}^N \omega_i r_{is} \leq y_s, \quad s = 1, \dots, S, \quad (1.72)$$

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{s=1}^S \rho_s y_s - v \leq z, \quad (1.73)$$

$$y_s \geq 0, \quad s = 1, \dots, S. \quad (1.74)$$

Выводы

В данной главе мы рассмотрели девять моделей, которые будут использованы в последующих тестированиях и анализе. Эти модели учитывают предпочтения инвесторов в различных формах:

- компромисс между риском и доходностью,
- неприятие потерь,
- неприятие риска,
- уровень диверсификации.

С одной стороны, интересно проанализировать результаты рационально обусловленных и поведенческих эффективных портфелей с точки зрения доходности и риска, в то время как, с другой стороны, поиск подходов к решению математически сложной задачи портфельной оптимизации с нелинейной целевой функцией и ограничениями представляет научный интерес.

Глава 2

Методы решения

В предыдущей главе мы рассмотрели четыре базовые модели: модель Марковица, репликация индекса, теория перспектив, кумулятивная теория перспектив. Проблема Марковица – это выпуклая задача, и ее решение может быть легко найдено с помощью встроенных в различные программы солверов, то же касается и модели слежения за индексом, которая поддается решению, используя простые солверы, такие как *FortMP* в *AMPL*. Модели теории перспектив и кумулятивной теории перспектив, напротив, являются невыпуклыми. Следовательно, методы решения становятся более изобретательными.

Мы также рассматриваем ограничение на кардинальность как ограничение на количество активов в оптимальном портфеле. Мы предполагаем, что инвестор может иметь определенное предпочтительное количество акций в своем оптимальном портфеле вместо всего разнообразия активов, доступных на рынке. Так как проблема портфельной оптимизации с условием на кардинальность принимает во внимание поведенческие предпочтения инвесторов, это приводит к математически очень сложной задаче с точки зрения подходов к ее решению.

Портфельные оптимизационные проблемы по модели Марковица и теории перспектив с ограничением на количество активов в портфеле являются нелинейными проблемами смешанного целочисленного программирования [30, 76]. В целом существуют два подхода к формулированию задачи Марковица с ограничением на кардинальность, от которых зависит подход к решению данной задачи. Базовый подход формулирует эту традиционную целевую функцию при стандартных ограничениях на пороговые значения и кардинальность. В этом случае применяются различные эвристические методы или стандартный симплекс метод, которые подходят для нелинейных задач [30].

Альтернативный подход заключается в переформулировании данной задачи непосредственно в двухкритериальную проблему. Эта техника поз-

воляет инвестору анализировать компромисс между кардинальностью и соотношением доходность/риск. Такой подход определяет множество недоминируемых точек (решений) двух целевой задачи, в которой первая целевая функция гладкая и сочетает в себе ожидаемую доходность и вариацию в форме квадратичной функции, и вторая – негладкая. Для решения двухцелевой оптимизационной проблемы выбирают алгоритм оптимизации свободных производных [77].

В нашем исследовании мы используем первый подход (базовый) по двум причинам. Первая заключается в формулировке проблемы. Нам необходима унифицированная форма формулировки проблемы для сравнительного анализа, который включает в себя несколько моделей. Намного проще имплементировать новые ограничения в стандартную проблему вместо того, чтобы менять целевую функцию при каждом новом ограничении. Второй причиной является метод решения. Некоторые модели очень сложные и требуют специфических алгоритмов. Эвристические подходы эффективны для подобного рода проблем даже когда они усложняются новыми дополнительными ограничениями.

Для моделей MV и IT с ограничением на кардинальность мы используем стандартный солвер *CPLEX* (AMPL), который разработан для применения к задачам целочисленного, смешанно целочисленного, линейного и квадратичного программирования, включая проблемы с квадратичными ограничениями с возможным появлением целочисленных переменных. Для поведенческих моделей мы разработали подход, специфицированный для невыпуклой целевой функции со сложным поведенческим компонентом. Мы обнаружили, что эвристика является подходящим методом решения для нашей задачи.

2.1. Поведенческие модели

Необходимо отметить, что задачи (1.20)–(1.23), (1.26)–(1.29) и (1.33)–(1.43) не являются задачами выпуклой оптимизации и функции (1.20), (1.26) и (1.33) недифференцируемые в точке r_0 . Более того, мы рассматриваем РТ модель с ограничением на кардинальность, которая потенциально делает эту проблему более сложной для решения. В силу того, что найти оптимальное решение для такого рода проблем достаточно сложно, многие исследователи и трейдеры используют эвристические подходы, которые не являются точными методами решения подобного вида портфельных оптимизационных проблем.

В нашем исследовании мы используем два эвристических подхода к решению базовой модели портфельной оптимизации с поведенческим компонентом, а также ее версии с ограничением на кардинальность. Первый основан на алгоритме дифференциальной эволюции, а второй – на использовании генетического алгоритма. Мы рассматриваем традиционный алгоритм дифференциальной эволюции и дифференциальную эволюцию со сглаживанием невыпуклой целевой функции с использованием сплайн-интерполяции. Также в продолжение статьи [78] мы предлагаем генетический алгоритм, который основан на мета-эвристических подходах [79], для нахождения «оптимального» решения проблемы портфельной оптимизации с ограничением на кардинальность.

Для упрощения наших расчетов мы определяем весовую функцию вероятности как $\pi(p) = p$ и используем оригинальную функцию значения $v(r)$, предложенную в [47]:

$$v(r) = \begin{cases} (r - r_0)^\alpha, & \text{если } r \geq r_0, \\ -\lambda (r_0 - r)^\beta, & \text{если } r < r_0. \end{cases} \quad (2.1)$$

2.1.1. Дифференциальная эволюция

Недавним добавлением к классу эволюционных эвристических подходов является метод дифференциальной эволюции, предложенный Сторном и Прайсом [80, 81]. В нашем исследовании мы находим решение оптимизационной задачи (1.33)–(1.43), применяя этот алгоритм, основанный на эволюционном принципе. В этом пункте мы рассматриваем подход дифференциальной эволюции, целью которого является получить «оптимальное» (близкое к оптимальному) решение для проблемы (кумулятивной) теории перспектив.

Пусть N будет количеством всех доступных активов. Нам необходимо найти оптимальное значение равномерно распределенной переменной $x = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in D_K \subseteq \mathbb{R}^N$, где D_K – это множество допустимых значений, т. е. мы ищем значение $x \in D_K$, которое обеспечивает решение задач (1.20) и (1.26). В целях поиска оптимального значения x нам необходимо максимизировать ожидаемое значение $(C)PT_{cc}(r(x))$ (что равносильно $(C)PT(r(x))$, если $K = N$) посредством следующих шагов.

1. Инициализация. Мы определяем множество $D_K = \{v \in D \text{ такое, что ровно } K \text{ компонент вектора } v \text{ положительные}\}$.

Пусть $P \in \mathbb{N}$. Мы генерируем начальную популяцию $v_i = (\omega_{i1}, \dots, \omega_{iN})$, $\forall i = 1, \dots, P^2$, $v_i \in D_K$.

2. Мутация и Кроссовер. Выберем векторы v_a, v_b, v_c случайным образом из векторов v_l , $l = 1, \dots, P^2$, так, что они не совпадают с v_i и друг

с другом. Также возьмем случайное число $R \in \{1, \dots, N\}$. Мы строим компоненты нового вектора $\tilde{v}_i \in D$ следующим образом. С вероятностью CR и если $R = j$, $j = 1, \dots, N$ для j -того компонента, полагаем вектор $\tilde{v}_{ij} = v_{aj} + (F + z_1)(v_{bj} - v_{cj} + z_2)$ и $\tilde{v}_{ij} = v_{ij}$ в противном случае. Здесь параметры $F \in [0, 2]$ и $CR \in [0, 1]$ называются дифференциальным весом и вероятностью скрещивания соответственно и должны быть тщательно подобраны (индивидуально, в зависимости от задачи); величины z_1 и z_2 принимают значения либо ноль с малой вероятностью (например, 0.0001 и 0.0002 соответственно), либо являются нормально распределенными переменными с нулевыми средними значениями и малым среднеквадратичным отклонением (например, 0.02). Параметры z_1 и z_2 не обязательны для алгоритма дифференциальной эволюции. Они используются для добавления некоторого «шума» в расчеты результирующего вектора, чтобы избежать попадания решения в локальный экстремум.

3. Отбор. Используя уравнение (1.33), мы рассчитываем значения $PT_{cc}(v_i)$ и $PT_{cc}(\tilde{v}_i)$, а также выбираем максимальное значение, обозначаемое как $\max(v_i)$, для перехода в новую популяцию, используемую в следующем поколении до тех пор, пока критерии остановки будут достигнуты (например, количество поколений, точность решения в количестве знаков после запятой и т.д.).

4. Финальная Оценка. В последнем поколении $g = G$ найдем вектор, который $v_i^* = \{v_i | \max\{PT_{cc}(v_1), \dots, PT_{cc}(v_{p2})\}, E(\max PT_{cc}(v_i)) \geq d\}$ (проверка на d ограничение). Вектор v_i^* тогда будет лучшим решением задач (1.20) и (1.26) [82].

2.1.2. Дифференциальная эволюция со сглаживанием

функции полезности с использованием сплайн-аппроксимации

В нашем исследовании мы внедряем сплайн-интерполяцию для функции полезности по теории перспектив в наш подход дифференциальной эволюции в целях решить проблему теории перспектив. Мы просто сглаживаем оригинальную функцию полезности и применяем алгоритм дифференциальной эволюции для решения проблемы.

Сглаживающие сплайны обычно применяются для дискретных или данных с шумами для обеспечения гладких изгибов. Мы получаем практичный, эффективный метод для оценки оптимального сглаживания исходя из применяемых данных. Производные могут быть оценены с использованием значения производных результирующего (почти) оптимального сглаживающего сплайна [83].

Заметим, что функция (1.20) не дифференцируема в точке $r = r_0$. Альтернативный подход к вычислению оптимального портфеля, согласно

теории перспектив, основанный на сглаживании целевой функции, был предложен в [84]. Идея состоит в том, чтобы использовать кубический сплайн вместо функции субъективной ценности (1.18) в δ -окрестности точки $r = r_0$, $\delta > 0$. Другими словами, можно заменить функцию субъективной ценности (1.18) ее сглаженной версией:

$$v_{\delta}(r) = \begin{cases} v(r), & \text{если } r \notin (r_0 - \delta, r_0 + \delta), \\ v(r), & \text{если } r \in (r_0 - \delta, r_0 + \delta), \end{cases} \quad (2.2)$$

где $v(r) = ar^3 + br^2 + cr + d$. Так как значения функций $v(r)$ и $v(r)$ и их производные должны совпадать в конечных точках δ -окрестности, т. е. в точках $r_0 - \delta$ и $r_0 + \delta$, мы можем рассчитать коэффициенты a , b , c , d , кубического полинома $v(r)$ из системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} v(-\delta + r_0) = v(-\delta + r_0), \\ v'(-\delta + r_0) = v'(-\delta + r_0), \\ v(\delta + r_0) = v(\delta + r_0), \\ v'(\delta + r_0) = v'(\delta + r_0). \end{cases} \quad (2.3)$$

Итак, мы можем переписать задачу (1.20) как

$$PT(v_{\delta}(r(x))) \rightarrow \max_{x \in D}. \quad (2.4)$$

Функция $v_{\delta}(r)$ является дифференцируемой в точке $r = r_0$.

2.1.3. Генетический алгоритм

Генетический алгоритм – это поисковый механизм, который основан на эволюционном принципе естественного отбора и генетики. Теоретические основы использования генетических алгоритмов были разработаны Холандом [79]. Алгоритм работает с популяциями решений (особей) и использует принцип выживания наиболее приспособленных особей. В генетическом алгоритме переменные решения закодированы в хромосомы. Для осуществления естественного отбора и получения хорошего решения особи эволюционируют в направлении, заданном фитнес-функцией. В рассматриваемых оптимизационных проблемах фитнес-функция обычно связана с целевой функцией исходной задачи. Более подробную информацию можно найти в [85–87].

В целях максимизации целевой функции или функции полезности $PT_{cc}(x)$ (или $CPT_{cc}(x)$), заданной формулой (1.33), при использовании генетического алгоритма нам необходимо осуществить следующие шаги.

1. Инициализация. Мы определяем множество $D_K = \{x \in D, \text{ такое, что ровно } K \text{ компонент вектора } x \text{ положительные}\}$.

Пусть $P \in \mathbb{N}$. Мы генерируем начальную популяцию $x_i = (\omega_{i1}, \dots, \omega_{iN})$, $\forall i = 1, \dots, P^2$, $x_i \in D_K$.

2. Отбор. В каждом поколении $g = 1, \dots, G$ мы вычисляем значения $PT_{cc}(x_1), \dots, PT_{cc}(x_{P^2})$ (или $CPT_{cc}(x_1), \dots, CPT_{cc}(x_{P^2})$) и располагаем их в порядке убывания, т. е. получаем убывающую последовательность

$$(PT_{cc}(x_{m_1}) \geq \dots \geq PT_{cc}(x_{m_{P^2}})),$$

или

$$(CPT_{cc}(x_{m_1}) \geq \dots \geq CPT_{cc}(x_{m_{P^2}})),$$

где множество $x_{m_1}, \dots, x_{m_{P^2}}$ является перестановкой начального множества $x_1, \dots, x_{P^2}$. Мы фиксируем максимальное значение целевой функции $\max PT_{cc}(x_i)$ (или $\max CPT_{cc}(x_i)$). Только первые $2P$ элементов переходят в новую популяцию без изменений, т. е. $x_{m_1}, \dots, x_{m_{2P}}$. Обозначим эти элементы новой популяции как $y_1, \dots, y_{2P}$.

3. Кроссовер и Мутация. Случайным образом выбираем два вектора $\tilde{x}_j$ и $\hat{x}_k$ на множестве $\{x_{m_{2P+1}}, \dots, x_{m_{P^2}}\}$ и скрещиваем их для получения потомства («потомка»). С этой целью мы строим l -й элемент ($l = 1, \dots, N$) новых векторов $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{iN})$, $i = 2P + 1, \dots, P^2$, $a_i \in D_K$, и векторов $\tilde{x}_j$ и $\hat{x}_k$, $\forall j, k = 2P + 1, \dots, P^2$, путем выбора между $\tilde{x}_{jl}$ и $\hat{x}_{kl}$, соблюдая следующие правила:

- если $\tilde{x}_{jl} = \omega_j$ и $\hat{x}_{kl} = \omega_k$ (т. е. актив присутствует в обоих родительских портфелях), тогда этот актив переходит потомку следующим образом: $a_{il} = \chi \cdot \omega_j + (1 - \chi) \cdot \omega_k$, где χ – сгенерированная случайным образом на $[0, 1]$ величина;
- если $\tilde{x}_{jl} = 0$ и $\hat{x}_{kl} = 0$ (т. е. актив не присутствует ни в одном из родительских портфелей), тогда $a_{il} = 0$ (этот актив исключается из портфеля потомка);
- если $\tilde{x}_{jl} = \omega_j$ и $\hat{x}_{kl} = 0$ (т. е. актив присутствует только в одном из родительских портфелей), тогда с вероятностью π $a_{il} = \omega_j$ (т. е. этот актив включается в результирующий портфель с вероятностью π).

Для применения мутации мы меняем каждый элемент в полученном векторе a_i с заданной малой вероятностью $\zeta > 0$ для сгенерированного случайным образом на $[0, 1]$ числа. Затем мы убеждаемся, что количество ненулевых элементов нового вектора меньше или равно K и нормализуем элементы этого вектора. Мы также находим максимум векторов $a_i, \tilde{x}_j, \hat{x}_k$ и обозначаем его как y_i . Он является наиболее приспособленным вектором и переходит в новую популяцию. Продолжаем то же самое до тех

пор, пока последний y_{p2} элемент матрицы новой популяции не будет заполнен.

4. Оценка. Мы вычисляем значения $PT_{cc}(y_1), \dots, PT_{cc}(y_{p2})$ (или $CPT_{cc}(y_1), \dots, CPT_{cc}(y_{p2})$) и сравниваем максимальные значения полученных целевых функций $\max PT_{cc}(y_i)$ с $\max PT_{cc}(x_i)$ (или $\max CPT_{cc}(y_i)$ с $\max CPT_{cc}(x_i)$). Новая популяция переходит в новое поколение (если $g < G$) тогда и только тогда, если $\max PT_{cc}(y_i) \geq \max PT_{cc}(x_i)$ (или $\max CPT_{cc}(y_i) \geq \max CPT_{cc}(x_i)$).

5. Заключительная оценка. В последнем поколении $g = G$ мы находим вектор $y_i^* = \{y_i | \max\{PT_{cc}(y_1), \dots, PT_{cc}(y_{p2})\}, E(\max PT_{cc}(y_i)) \geq d\}$ (или $y_i^* = \{y_i | \max\{CPT_{cc}(y_1), \dots, CPT_{cc}(y_{p2})\}, E(\max CPT_{cc}(y_i)) \geq d\}$) – проверка на d ограничение. Тогда вектор y_i^* – это лучшее решение.

Псевдокоды и реализация двух рассмотренных алгоритмов: алгоритма дифференциальной эволюции и генетического алгоритма, базовых и с дополнительными ограничениями и модификациями представлены в приложении 1.

2.2. Модели с ограничением на CVaR

Хорошо известно, что CVaR является эффективной мерой риска в современных финансах [67, 70, 71]. Мы обсуждали преимущества и недостатки этой меры риска в главе 1. В этом параграфе будет представлен метод решения базовой модели Марковица с ограничением на CVaR или mean-variance-CVaR модели.

В отличие от одноцелевых моделей Марковица и теории перспектив, рассмотренных в п. 1.4.2, модель mean-variance-CVaR является многокритериальной, потому что необходимо минимизировать две цели – дисперсию и CVaR – при ограничении на желаемую среднюю доходность. В целях облегчения расчетов мы трансформируем эту проблему в одноцелевую задачу, следуя логике эффективности по Парето [88, 89]. В результате мы формулируем задачу (1.61)–(1.67), где для желаемого уровня доходности портфеля (подобно модели Марковица) мы минимизируем только дисперсию, но при дополнительном ограничении на CVaR (см. подробное описание в п. 1.4.2).

Известно, что (см., например, [64]) значение x^* – это оптимальное решение по Парето для проблемы (1.60) тогда и только тогда, когда x^* является оптимальным решением проблемы (1.61)–(1.67) при $z = CVaR_\alpha(x^*)$ и $d = E(x^*)$, если ковариационная матрица положительно определена. Заметим, что положительная определенность ковариационной матрицы

обеспечивает проверку строгой выпуклости целевой функции (дисперсии), следовательно, гарантирует уникальность оптимального решения.

Мы ищем решение для модели mean-variance-CVaR, используя следующие шаги.

1. Рассчитываем $\min\text{CVaR}$.

Мы находим минимальное значение CVaR для специфических данных без ограничения на среднюю доходность портфеля. В итоге получаем оптимальное целевое значение и обозначаем его как $\min\text{CVaR}$.

2. Рассчитываем $d_{\min\text{CVaR}}$.

Максимальная ожидаемая средняя доходность, приемлемая для портфеля с минимизированным CVaR (т. е. портфель с $\text{CVaR} = \min\text{CVaR}$, рассчитанным на предыдущем шаге), может быть получена путем решения проблемы максимизации средней доходности портфеля при ограничении на минимальное значение CVaR, равное $\min\text{CVaR}$. Полученное значение максимально возможной средней доходности портфеля обозначим как $d_{\min\text{CVaR}}$.

3. Рассчитываем $d_{\min\text{var}}$.

Рассчитаем минимальное значение ожидаемой доходности путем решения классической оптимизационной задачи Марковица (без ограничения на ожидаемый доход), т. е. минимизируя дисперсию, и обозначим полученную доходность как $d_{\min\text{var}}$.

4. Рассчитываем $[d_{\min}, d_{\max}]$ и выбираем d^* .

Выберем $d_{\min}$ как максимум из $d_{\min\text{var}}$ и $d_{\min\text{CVaR}}$.

$d_{\max} = \max(\bar{r}(x))$ – это максимально возможная ожидаемая доходность, которая может быть найдена как оптимальное целевое значение для проблемы максимизации ожидаемой доходности портфеля без дополнительных ограничений, за исключением обязательного ограничения на сумму весов в портфеле, $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$.

Выберем $d^* \in [d_{\min}, d_{\max}]$.

5. Рассчитываем $[z_{\min}, z_{\max}]$ и выбираем z^* .

Решаем оптимизационную проблему $\min\text{CVaR}$ при ограничении на уровень доходности портфеля d^* и обозначаем результат как $z_{\min}$.

Мы минимизируем дисперсию при ограничении на уровень доходности d^* и обозначаем оптимальное решение как x^* . Затем мы рассчитываем CVaR для найденного портфеля x^* и обозначаем результат как $z_{\max}$.

Выбираем $z^* \in [z_{\min}, z_{\max}]$.

6. Решение задачи.

Решаем задачу (1.61)–(1.67) при ограничениях на полученное значение средней доходности портфеля d^* и выбранного значения CVaR z^* .

Мы добавляем ограничение на CVaR в модель теории перспектив в целях сравнительного анализа результатов работы этой модели с результатами работы модели mean-variance-CVaR. Проблема, описанная в (1.68)–(1.74), может быть решена с использованием эвристических подходов, разработанных в параграфе 2.1.

Глава 3

Результаты расчетов

3.1. Эмпирическое исследование

3.1.1. Используемые данные

Мы решали задачи портфельной оптимизации, используя публично доступные данные, относящиеся к пяти главным рыночным индексам и позаимствованные с ресурса OR-Library [90]. К этим пяти рыночным индексам относятся Hang Seng (Гонконг), DAX 100 (Германия), FTSE 100 (Великобритания), S&P 100 (США) и Nikkei 225 (Япония) для 290 временных периодов каждый (недельные данные), доступные на <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/portinfo.html>. Все эти множества данных были использованы для расчётов первоначально Чангом с соавт. (2000) (см. [76]) и Вудсайд-Ориахи с соавт. (см. [30]). Размеры этих пяти тестируемых множеств данных ранжируются от $N = 31$ (Hang Seng) до $N = 225$ (Nikkei 225) и представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Размерность тестируемых проблем

Множество данных	Количество ценных бумаг N	Количество временных периодов S
Hang Seng	31	290
DAX 100	85	290
FTSE 100	89	290
S&P 100	98	290
Nikkei 225	225	290

Данные, использованные в этом исследовании, представлены в виде матриц цен на активы. Мы трансформируем оригинальные массивы данных в матрицы доходности активов. Широко распространено использование логарифма отношения цен в целях получения ставки доходности

вместо использования отношения абсолютных цен активов [91]. В нашей работе ставка доходности r рассчитывается исходя из цены p в каждом временном отрезке s следующим образом:

$$r_i = \ln \left(\frac{p_{i,s}}{p_{i,s-1}} \right), i = 1, \dots, N, \quad s = 1, \dots, S,$$

где N – число активов и S – общее количество временных периодов.

Результаты вычислительного эксперимента на генеральной выборке (in-sample – выборочные данные), представленные в настоящем исследовании, получены с использованием первых 100 временных периодов описанных выше наборов данных. Остальные временные периоды (190) использованы для бутстрэп тестирования вневыборочных данных (bootstrap out-of-sample tests).

В нашей работе мы применяем метод Монте–Карло для генерации данных с некоторыми видами распределения в качестве данных для тестирования изучаемых моделей вне выборки (out-of-sample test data) или имитационного моделирования. Нас интересует так называемый «бычий» рыночный тренд, который показывает уверенность инвестора в том, что позитивная динамика цен продолжится. Он также характеризуется ростом инвестиций и высокой активностью торгов, что следует из стабильной экономической ситуации. «Медвежий» рынок, напротив, демонстрирует пессимистичные ожидания, которые приводят к стагнации и долгосрочному снижению цен. В целях изучения результатов работы моделей в различных рыночных ситуациях мы моделируем эти два тренда в виде матриц доходностей активов.

Вневыборочные данные (out-of-sample data set), которые симулируют «бычий» и «медвежий» рынки, получены с использованием встроенных функций, доступных в пакете Statistics Toolbox для Matlab. Для имитационного моделирования «бычьего» рынка мы применяем функцию *datasample*. Эта функция $y = \text{datasample}(data, k)$ возвращает k наблюдений, выбранных равномерно случайным образом, с замещением, из специфического множества данных *data*. В целях получения данных, обладающих свойствами «бычьего» рынка, мы симулируем доходности, основанные на исторических данных рыночного роста (данные с 4.01.2005 по 30.12.2005; всего 252 временных периодов).

Моделирование «медвежьего» рынка сделаны при помощи команды *mvtrnd*. Выражение $r = \text{mvtrnd}(kR, df, cases)$ возвращает матрицу случайных чисел, выбранных из мультивариативного t -распределения, где kR – матрица исторических доходностей в период рыночного кризиса, df –

степени свободы (в нашем вычислительном исследовании $df = 5$) и может быть либо скаляром (как в нашем исследовании), либо вектором с элементами случаев (случай – количество линий, равный 100 в нашем исследовании, например). Мы выбрали t -распределение, потому что «хвосты» t -распределения Стьюдента стремятся к нулю медленнее, чем «хвосты» нормального распределения, что более реалистично отражает динамику и распределение доходностей активов на рынке. Для симуляций «медвежьего» рынка мы используем исторические данные, относящиеся к индексу FTSE 100 в период глобального кризиса в 2008 г., доступные в базе данных Bloomberg Database (данные с 1.01.2008 по 31.12.2008; всего 261 временных периодов) как изначальную матрицу для имитационного моделирования. Таким образом, мы применяем одновременно как кризисные исторические данные в качестве образцовой выборки данных, так и моделирование t -распределения для того, чтобы подчеркнуть контраст между двумя видами распределения доходностей, «бычьего» и «медвежьего».

Задачи Марковица и слежения за индексом (базовые формулировки и с дополнительными ограничениями) решаются с использованием программного обеспечения AMPL с солвером CPLEX (версия 12.5.1.0) в качестве пакета, разработанного для решения оптимизационных проблем большой размерности. Проблемы выбора портфеля теории перспектив и кумулятивной теории перспектив (базовые формулировки и с дополнительными ограничениями) были реализованы на программном обеспечении Matlab с использованием встроенных и специально разработанных функций. Все симуляции и бутстрэппинг были осуществлены на Matlab. Система запускалась на MS Windows 7 64-bit SP 1 и в нашей вычислительной работе мы использовали Intel Core i3-2310M pc с процессором 2.10 GHz и 8.0 GB RAM.

3.1.2. Параметры моделей

Здесь и в дальнейшем мы рассматриваем модели теории перспектив и кумулятивной теории перспектив как класс поведенческих моделей для удобства сравнительного анализа, поскольку их свойства, исследуемые в настоящей работе, схожи. Для этих моделей (также с дополнительными ограничениями и слежением за индексом) мы используем постоянные значения параметров $\lambda = 2.25$, $\alpha = \beta = 0.88$, как предложено Тверски и Канеманом в статье [47]. Для уравнений (1.24) и (1.25) мы берем $\delta = 0.61$, $\gamma = 0.69$ согласно [47].

Тверски и Канеман рассматривали кумулятивную теорию перспектив как комплексную модель. Оценка подобного рода проблем является достаточно сложной в силу большого количества параметров. В целях снижения этого количества они «концентрировались на качественных свойствах данных вместо параметрических оценок и мер соответствия»* [47] с использованием нелинейных регрессионных операций для оценки параметров уравнения (1.18), они обнаружили, что «медианная экспонента функции субъективной стоимости равна 0.88 для выигрышей и проигрышей, согласно уменьшающейся чувствительности» и «медиана λ равна 2.25 ... и медианное значение δ и γ , соответственно, равны 0.61 и 0.69» [47].

В целях сравнения результатов работы различных моделей мы используем единый уровень желаемой доходности портфеля d только для базовых моделей и с ограничением на кардинальность. Для каждого множества данных параметр $d = \max \bar{r} - (\max \bar{r} - \min \bar{r}) \cdot 0.25$, где $\max \bar{r}$ и $\min \bar{r}$ – максимальная и минимальная средние доходности на каждом наборе данных. Необходимо заметить, как видно из значений, что этот уровень выбран достаточно высоким для того, чтобы рассматривать его как экстремальный для предложенных моделей. Принимая во внимание характер модели теории перспектив, которая выбирает более агрессивные портфели с высоким уровнем доходности, этот выбор высокого показателя d является обоснованным (см. обсуждение результатов в параграфе 3.2). Для некоторых множеств данных (в особенности для больших матриц) нам приходилось корректировать параметр d (уменьшать значение d) в целях обеспечения допустимости оптимального портфеля (решения) для поведенческих моделей.

Используемые значения параметра d можно найти в табл. 3.2, в которой также приводятся значения референтной точки и банковской процентной ставки. Необходимо отметить, что референтная точка в табл. 3.2 используется для поведенческих моделей, базовых и с прочими допол-

Таблица 3.2

Табулированные значения параметров моделей

Множество данных	d	IR	r_0	K	K^*
Hang Seng	0.0118	0.005	0.00005	7	15
DAX 100	0.006	0.0025	0.000025	10	20
FTSE 100	0.0077	0.0025	0.000025	10	25
S&P 100	0.0109	0.005	0.00005	5	25
Nikkei 225	0.0005	0.0001	0.000001	3	25

*Перевод автора.

нительными ограничениями, за исключением слежения за индексом. Эти значения референтной точки отражают среднюю процентную ставку (IR) для различных рыночных экономик (в зависимости от соответствующего рыночного индекса используемого множества данных). Следуя определению функции субъективной стоимости теории перспектив параметр r_0 устанавливается для каждого временного периода в случае работы с базовыми моделями (с и без использования ограничения на кардинальность и CVaR) и его значение является постоянным. Для проблемы слежения за индексом, напротив, этот параметр векторный и изменяется для каждого временного периода, в зависимости от значения индекса.

Мы используем параметр K для моделей с ограничением на кардинальность (базовые модели MV и PT). Для того чтобы отделить проблему слежения за индексом от прочих моделей, пусть K^* будет ограничением на количество активов для этих проблем слежения за индексом. Так как уровни диверсификации базовых моделей и моделей слежения за индексом различны, мы используем разные значения для параметров K и K^* . Модели с ограничением на кардинальность, согласно их формулировкам, имеют верхнюю и нижнюю границы весов активов. Мы используем $l_i = 0.01$ и $u_i = 1$ в качестве таких границ.

Для моделей с ограничением на CVaR необходимо определить множество допустимых решений для параметра d^* (ожидаемая доходность) и z^* (ограничение на CVaR) для каждой матрицы данных, как было описано в параграфе 2.2. Тестируя модели MV и PT с ограничением на CVaR, мы обнаружили, что множество допустимых целевых доходностей, которое было определено для модели MV, также подходит и для модели PT. Однако параметр z имеет различные допустимые множества для этих двух моделей, таким образом, невозможно определить идентичное значение z^* для них. Сложность и особые свойства, а также поведение целевой функции теории перспектив в сравнении с проблемой Марковица приводят к разным множествам допустимых решений для этих моделей.

Следовательно, мы определяем z_{min} и z_{max} для теории перспектив отдельно как реальные минимальные и максимальные значения CVaR оптимальных портфелей (определенные в процессе работы эвристических алгоритмов), полученных для модели теории перспектив без ограничения на CVaR, основываясь на G наблюдениях (в каждом поколении). В табл. 3.3 представлены границы допустимых множеств решений для параметра z и выбранный z^* для модели MV, а также числовые границы для параметра d (обозначенные d_{min} и d_{max}) и d^* для двух моделей – MV и PT с ограничением на CVaR (в силу схожести). Границы для допусти-

Таблица 3.3

**Табулированные значения параметров d^* и z^*
для MV модели с ограничением на CVaR**

Множество данных	d_{min}	d_{max}	d^*	z_{min}	z_{max}	z^*
Hang Seng	0.0081	0.0153	0.011	0.0472	0.0570	0.056
DAX 100	0.0034	0.01008	0.007	0.0124	0.0191	0.019
FTSE 100	0.0054	0.0119	0.007	0.0102	0.0149	0.014
S&P 100	0.0030	0.0169	0.006	0.0082	0.0145	0.014
Nikkei 225	0.0018	0.0056	0.002	0.0287	0.0364	0.036

мых множеств решений с параметром z и выбранным значением z^* для PT модели с ограничением на CVaR показаны в табл. 3.4.

Мы рассчитываем значение CVaR для MV и PT моделей с ограничением на CVaR, используя доверительный интервал $\alpha = 95\%$ в данном исследовании.

Таблица 3.4

**Табулированные значения параметра z^*
для PT модели с ограничением на CVaR**

Множество данных	z_{min}	z_{max}	z^*
Hang Seng	0.0631	0.0754	0.0727
DAX 100	0.0233	0.0273	0.0268
FTSE 100	0.0242	0.0378	0.025
S&P 100	0.0218	0.041	0.038
Nikkei 225	0.0392	0.0542	0.0487

3.1.3. Параметры эвристических методов решения

Ранее мы отмечали, что модели теории перспектив и кумулятивной теории перспектив являются комплексными математическими задачами и, следовательно, требуют специальных методов проведения расчетов и получения решений. В параграфе 2.1 мы предложили различные методы решения для этих моделей. В целях получения решения, близкого к оптимальному, для поведенческих моделей мы используем алгоритмы дифференциальной эволюции, дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией и генетический алгоритм.

Хорошо известно, что параметры эвристических и метаэвристических алгоритмов оказывают огромное влияние на эффективность работы этих алгоритмов (см., например, [92]). Очень важно подобрать подходящие параметры для каждой проблемы и множества данных (в зави-

симости от размера матрицы). Для получения лучшего решения задач мы иллюстрируем здесь работу алгоритмов, используя первое множество данных (Hang Seng), подбирая более подходящие значения для каждого параметра и анализируя эффективность каждого алгоритма в целях определения лучшего набора параметров для нашего исследования. Анализ и выбор параметров для выбранного алгоритма для прочих множеств данных представлен в приложении 2.

Наш выбор параметров основан на трех сравнительных критериях: время расчетов (CPU time – Central Processor Unit time – время работы центрального процессора), значение функции полезности, т. е. значение целевой функции $PT(x)$, и ширина диапазона изменения $PT(x)$, т. е. разница $\xi = \max PT(x) - \min PT(x)$. В целях изучения стабильности работы алгоритма мы тестируем каждую комбинацию параметров 10 раз и сравниваем среднее CPU time, среднюю полезность и ξ в форме разности $\max PT(x) - \min PT(x)$.

Оптимальное решение проблемы теории перспектив обычно не известно, т. е. не существует точного оптимального решения для сравнительного анализа, поэтому мы определяем оптимальное решение как лучшее в множестве решений, полученное в наших тестах. В этом параграфе мы также рассмотрим результаты работы заявленных выше эвристических методов решения для проблемы теории перспектив в целях определения лучшего подхода с точки зрения различных индикаторов, описанных выше.

Многие исследования посвящены применению эвристических подходов как эффективного инструмента для решения невыпуклых задач. Марингер в 2008 г. представил сравнительный анализ квадратичной, степенной функций полезности и функции полезности теории перспектив с различными уровнями избегания потерь [41]. Он использовал метод дифференциальной эволюции в целях получения решения для модели теории перспектив. Статья фокусируется в основном на результатах работы моделей и параметрах распределения доходности оптимальных портфелей, но не на самом методе решения.

Насколько нам известно, не существует исследований, где применяется метод дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией и генетический алгоритм для решения проблемы теории перспектив. С математической точки зрения интересно изучить результаты работы различных методов решения в приложении к проблеме (1.33)–(1.43), которая является невыпуклой, и функции (1.33), которая является недифференцируемой.

Метод дифференциальной эволюции

Эффективность алгоритма дифференциальной эволюции зависит от таких важных параметров, как дифференциальный вес F , вероятность скрещивания CR , размер популяции P и количество поколений G . Необходимо начать с параметра F , потому что дифференциальный вес является ключевым параметром метода дифференциальной эволюции. Как мы заметили, это значение сильно влияет на среднее значение целевой функции и ее дисперсию. Известно, что $F \in [0, 2]$ (см. п. 2.1.1), однако в нашем случае значение выше, чем 1, дает нам очень нестабильное решение. Следовательно, мы определили следующие значения для тестирования: 0.05, 0.15, 0.5 и 0.95. По результатам, приведенным в табл. 3.5 для нашей специфической функции, чем меньше значение дифференциального веса, тем выше значение целевой функции (функции полезности) и тем меньше диапазон решения ($\xi = 0$ приводит к лучшему качеству решения). Значение 0.05 для этого параметра дает нам лучшие результаты по всем трем критериям. Жирным шрифтом в табл. 3.5. обозначены наилучшие значения показателей.

Таблица 3.5

**Сравнение параметров алгоритма дифференциальной эволюции
(множество данных Hang Seng)**

Параметр	Значение параметра	Время расчетов	$PT(x)$	ξ
F	0.05	61.8	0.6237	0
	0.15	64.4	0.6235	0.0003
	0.5	66	0.62084	0.0013
	0.95	69.2	0.56534	0.0269
CR	0.3	61.6	0.62356	0.0002
	0.5	61.8	0.6237	0
	0.8	65.4	0.6237	0
P	15	35.2	0.62302	0.0031
	20	61.8	0.6237	0
	25	97.4	0.6237	0
G	70	43.2	0.62342	0.0005
	100	61.8	0.6237	0
	130	80.6	0.6237	0

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Необходимо отметить, что, выбирая параметр $F = 0.05$, мы полагаем $CR = 0.5$, $P = 20$ и $G = 100$. Этот выбор основан на предварительном анализе и рекомендациях в литературе [81, 93]. Здесь и в дальнейшем

во время тестирования каждого параметра один за другим мы фиксируем значения для прочих параметров ($F = 0.05$, $CR = 0.5$, $P = 20$ и $G = 100$) для того, чтобы показать разницу результатов.

Следующий шаг – это выбор оптимального значения для показателя вероятности скрещивания. Известно, что $CR \in [0, 1]$ (см. п. 2.1.1). Мы анализируем три значения для CR – 0.3, 0.5, 0.8. Результаты в табл. 3.5 подтверждают, что $CR = 0.5$ обеспечивает приемлемое время расчетов (лучшее, чем при $CR = 0.8$) и стабильную полезность (лучше, чем при $CR = 0.3$), что приводит к стабильному решению.

Параметры F и CR должны выбираться для конкретной целевой функции и исходя из особенностей поставленной задачи. Значения G и P , напротив, в первую очередь зависят от размера проблемы (множества экспериментальных данных). Например, для данных с 32 активами (включая индекс в качестве актива) мы определяем значения для G и P , однако для более масштабных проблем мы используем значения пропорциональные к лучшим найденным здесь. Мы рассматриваем значения этих параметров как функцию, зависящую от размера проблемы. Мы сейчас объясним выбор этих параметров только для самого маленького набора данных Hang Seng.

Мы тестируем значения $P = 15, 20, 25$ в целях определения подходящего параметра с точки зрения времени расчетов и оптимальности решения. Как можно заметить в табл. 3.5, размер популяции 20 обеспечивает лучшее значение функции полезности (количественно и качественно) с разумными временными затратами. Значение $P = 25$ требует больше времени (+35.6 секунд) в сравнении с $P = 20$, обеспечивая такую же полезность, в то время как меньший размер популяции приводит к нестабильному решению.

Для применения алгоритма ДЭ нам необходимо решить, какое количество поколений будет лучшим для данной проблемы. Мы определяем три точки для тестирования, а именно $G = 70, 100, 130$, в целях поиска баланса между качеством решения и временными затратами на его поиск. Мы выбрали 100, так как оно обеспечивает максимальное значение функции полезности с диапазоном 0 в приемлемое время работы алгоритма, как показано в табл. 3.5.

Алгоритм дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией

В силу того, что принципы алгоритма дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией идентичны алгоритму ДЭ, результаты тестирования параметров показали такие же результаты. Мы только поменяли значение дифференциального веса $F = 0.1$, так как оно дает лучшее

время работы алгоритма. Результаты тестирования отражены в табл. 3.6. В итоге были выбраны следующие параметры для алгоритма дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией, примененного для модели PT: $F = 0.1$, $CR = 0.5$, $P = 20$ и $G = 100$.

Таблица 3.6

Сравнение параметров алгоритма дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией (множество данных Hang Seng)

Параметр	Значение параметра	Время расчетов	$PT(x)$	ξ
F	0.1	63.5	0.6237	0
	0.15	65.4	0.6235	0.0005
	0.5	67	0.62084	0.0017
	0.95	69.2	0.56534	0.036
CR	0.3	62.7	0.6134	0.0024
	0.5	63.5	0.6237	0
	0.8	67.3	0.6237	0
P	15	41.6	0.62302	0.0043
	20	63.5	0.6237	0
	25	103.8	0.6237	0
G	70	43.2	0.62342	0.0005
	100	63.5	0.6237	0
	130	85.7	0.6237	0

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Генетический алгоритм

Генетический алгоритм имеет три главных параметра: вероятность мутации z , размер популяции P и количество поколений G . Эти три параметра оказывают наибольшее влияние на результаты работы алгоритма.

Как показано в табл. 3.7, мы тестируем различные значения для каждого из этих параметров для того, чтобы найти оптимальные установки. В анализе мы используем постоянные параметры $z = 0.5$, $P = 15$ и $G = 70$ для множества данных Hang Seng (Гонконг) во время тестирования каждого параметра в целях отразить разницу в результатах. Этот выбор основан на предварительном анализе и рекомендациях, доступных в литературе.

Прежде всего необходимо выбрать параметр «вероятность мутации». Мы взяли различные значения параметра z . Как можно увидеть в табл. 3.7, время работы алгоритма не меняется значительно и, следовательно, не зависит от этого показателя. Очевидно, что $z = 0.5$ дает нам необходимый

и достаточный мутационный компонент для получения лучшей стабильности решения. Значения выше ($z = 0.7$) или ниже ($z = 0.3$) дают решения с более низким уровнем стабильности. Кроме того, значение целевой функции в данном случае также не является лучшим.

Размер популяции – это очень важный параметр для любого эвристического алгоритма. Необходимо найти правильное значение P для конкретной проблемы. Существует множество рекомендаций в литературе, которые помогают выбрать подходящие параметры для генетического алгоритма в зависимости от изучаемой целевой функции (см., например, [94]). Многие руководства предлагают использовать в качестве значения P количество переменных (в нашем случае можно рассматривать количество активов в каждом наборе данных), умноженное на 10 для такого рода сложных целевых функций, как функция полезности теории перспектив. В то же время для проблемы портфельной оптимизации рекомендуемый размер популяции приблизительно равен 100–200 [95]. В нашем случае мы имеем 32 актива (включая индекс в качестве самостоятельного актива) на множестве данных, и тестируя модель, мы обнаружили, что поисковый интервал $[10, 20]$ является оправданным для такой маленькой матрицы. Принимая во внимание, что в нашем алгоритме мы используем размер популяции P^2 получаем интервал $[100, 400]$, который удовлетворяет первую рекомендацию ($32 \cdot 10 = 320$), а также и вторую $[100, 200]$.

Размер популяции в основном влияет на временные затраты работы алгоритма. И снова необходимо найти баланс между расчетным временем и стабильностью, потому что качество не улучшается значительно с ростом значения P . Однако решение становится более волатильным с увеличением размера популяции (см. результаты для $P = 10$ в табл. 3.7). Мы определили $P = 15$ как лучшее для наших экспериментов, потому что оно дает оптимальную полезность и экономит время расчетов в сравнении с $P = 20$. Также $P = 15$ обеспечивает хорошее пространство поиска для исследования.

Мы изучаем интервал $[40, 100]$ для того, чтобы определить оптимальное значение параметра «количество поколений». Изначально, мы тестировали экстремально большие значения, такие как 300 и 400, и качество решения менялось не сильно сравнительно со значением 100, но время работы программы возрастало значительно. В табл. 3.7 видно, что разница между результатами, полученными при использовании $G = 70$ и $G = 100$, также не значительная, следовательно, мы можем сэкономить время работы, получая приблизительно схожий диапазон решений и зна-

чение целевой функции, в то время как уменьшение значения G приводит к деградации решения.

Как было отмечено ранее, мы рассматриваем значения параметров P и G как функцию от размерности задачи для эвристических подходов, и необходимо выбирать их пропорционально размерности задачи. Значения параметров G и P для генетического алгоритма для задачи различных размерностей можно найти в приложении 2.

Таблица 3.7

**Сравнение параметров генетического алгоритма
(множество данных Hang Seng)**

Параметр	Значение параметра	Время расчетов	$PT(x)$	ξ
z	0.3	36.6	0.6219	0.0084
	0.5	36.2	0.62354	0.0002
	0.7	36.8	0.62352	0.0004
P	10	15.6	0.60916	0.0713
	15	36.2	0.62354	0.0002
	20	67.4	0.62361	0.0002
G	40	25.6	0.6235	0.0034
	70	36.2	0.62354	0.0002
	100	47.2	0.62358	0.0001

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Необходимо отметить, что все три эвристические алгоритма дают нам одинаковое значение целевой функции. Этот факт подтверждает точность реализации описанных алгоритмов, предложенных в качестве методов решения для модели теории перспектив.

Мы заметили, что значение критерия ξ для генетического алгоритма значительно хуже, чем результаты, достигнутые при тестировании методом дифференциальной эволюции. Однако время расчетов ГА на много меньше, что дает преимущество в сравнении с алгоритмом ДЭ. Это достоинство определяет выбор генетического алгоритма в качестве метода решения для задач с поведенческим компонентом для дальнейшего числительного исследования в данной работе.

3.2. Сравнительный анализ результатов работы моделей

3.2.1. Связь с предыдущими исследованиями

Мы бы хотели отметить два эмпирических исследования в литературе, которые внесли значительный вклад в развитие и практическое приложение поведенческих моделей.

Марингер [41] изучал избегание риска и потерь инвестором по теории перспектив, используя моменты более высокого порядка, такие как коэффициент асимметрии и эксцесс. Он обнаружил и доказал, что «более высокий уровень избегания риска может привести к инвестициям с большей, а не меньшей волатильностью»* [41]. Это может быть объяснено чувствительностью в отношении возрастания положительного коэффициента асимметрии и уменьшения эксцесса. Чем больше растет стремление инвестора избежать потери, тем большее появляется стремление рискнуть и тем более агрессивным становится выбор портфеля в случае, когда поведенческий инвестор сталкивается с потерями.

Предпочтения некоторых активов в рамках установок модели СРТ с точки зрения специфических характеристик активов были исследованы Барберисом и Хуангом в 2008 г. [50]. Они обнаружили, что положительно асимметричные ценные бумаги более предпочтительны для оптимальных портфелей по модели СРТ, чем для оптимальных портфелей по модели MV. Они предположили, что этот факт связан с влиянием вероятностной весовой функции [50]. Такой же результат был получен Бернардом и Госсубом в 2010 г. [51].

3.2.2. Сравнительный анализ базовых моделей

Итоговые результаты работы базовых моделей Марковица, теории перспектив и кумулятивной теории перспектив в рамках выборки (in-sample) представлены в табл. 3.8. Эта таблица отражает следующие показатели: соотношение $\bar{r}/\sigma$, среднюю доходность портфеля $\bar{r}$, среднеквадратичное отклонение σ , VaR и CVaR, а также количество активов n в оптимальном портфеле и время работы программы (CPU) в секундах, что является значимым для эвристических подходов.

Как было отмечено ранее (в параграфе 1.4), VaR и CVaR часто используются совместно и применение этой комбинации двух мер риска дает выгодное преимущество в оценке риска для несимметричного распределения потерь, что характеризует реальные рыночные условия.

Очевидно, что время работы эвристических алгоритмов для поведенческих моделей значительно больше, чем для стандартных методов оптимизации, применяемых для решения задач квадратичного линейного программирования, которые используются для модели Марковица. Вычислительная сложность задачи кумулятивной теории перспектив делает

*Перевод автора.

время работы алгоритмов еще больше. Время работы программы для кумулятивной теории перспектив в три раза больше, чем для теории перспектив.

Обычно качество эвристического подхода для задач малой размерности может быть измерено отклонением эвристического решения от оптимального решения [30]. Однако эффективный фронт проблемы оптимизации портфеля по теории перспектив не известен. Как можно заметить в табл. 3.8, очень сложно сравнивать среднюю доходность портфелей и риск различных моделей, потому что модель РТ демонстрирует более агрессивный с точки зрения доходности выбор активов в оптимальный портфель и соответственно получает больший риск. В данном случае мы предлагаем использовать соотношение $\bar{r}/\sigma$ в качестве унифицированной меры результата портфеля, которая включает среднюю доходность портфеля и его меру риска. Чем больше значение соотношения $\bar{r}/\sigma$, тем более эффективен портфель.

Таблица 3.8

Сравнительный анализ базовых моделей (in-sample)

Множество данных	Модель	CPU	n	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng $d=0.0118$	MV	0.015	9	0.3926	0.0118	0.0301	-0.0373	-0.0644
	PT	36.2	8	0.3922	0.0131	0.0335	-0.0371	-0.0727
	CPT	104	5	0.3616	0.0130	0.0359	-0.0500	-0.0668
DAX 100 $d=0.006$	MV	0.031	16	0.4683	0.0060	0.0128	-0.0141	-0.0197
	PT	550	12	0.4529	0.0083	0.0183	-0.0145	-0.0248
	CPT	1790	7	0.4369	0.0080	0.0183	-0.0144	-0.0206
FTSE 100 $d=0.0077$	MV	0.031	14	0.5636	0.0077	0.0137	-0.0121	-0.0178
	PT	630	17	0.4797	0.0090	0.0188	-0.0114	-0.0272
	CPT	1904	22	0.4933	0.0085	0.0171	-0.0153	-0.0163
S&P 100 $d=0.0109$	MV	0.046	11	0.5115	0.0109	0.0213	-0.0279	-0.0328
	PT	721	6	0.4940	0.0109	0.0221	-0.0267	-0.0391
	CPT	1994	7	0.4717	0.0105	0.0222	-0.0265	-0.0265
Nikkei 225 $d=0.0005$	MV	0.14	13	0.0159	0.0005	0.0196	-0.0349	-0.0395
	PT	1179	4	0.1434	0.0034	0.0238	-0.0338	-0.0384
	CPT	4862	4	0.1598	0.0039	0.0246	-0.0325	-0.0326

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Мы заявляли ранее, что модель Марковица может быть использована как эталон в данном исследовании. Этот подход обоснован тем, что модель Марковица получает оптимальные решения на основе доходности и дисперсии. Можно увидеть, что на каждом наборе данных соотношение $\bar{r}/\sigma$ для MV модели является лучшим среди прочих. Только на данных

Nikkei 225 PT модель достигла более высокого показателя, так как она нашла лучший портфель с экстремально высоким уровнем средней доходности и достаточно сложно сравнивать результаты в данном случае. Если мы установим этот высокий уровень средней доходности портфеля как d (ограничение на желаемую доходность для модели Марковица), соотношение $\bar{r}/\sigma$ становится выше, чем значение данного соотношения, достигнутое моделью теории перспектив за счет меньшего значения σ .

Мы бы хотели обратить внимание, что здесь и в дальнейшем значения VaR и CVaR мы рассчитываем относительно доходов (вместо убытков). Это означает, что, начиная с табл. 3.8, чем выше значение этих мер риска, тем меньше фактический риск портфеля.

Как было отмечено ранее, мы воспринимаем индекс как обычный актив в нашем исследовании и позволяем ему быть включенным в оптимальный портфель с целью исследования его привлекательности для изучаемых моделей. Мы предполагаем, что индекс может быть эффективным активом в силу умеренного риска и доходности. Согласно нашим экспериментам, лишь модель кумулятивной теории перспектив выбирает индекс в двух множествах данных из пяти. Однако, несмотря на слабые результаты по большинству показателей, модель CPT демонстрирует лучшее значение CVaR сравнительно с PT моделью. Эта модель показывает в основном консервативное инвестиционное поведение, согласно мере риска σ и CVaR, если сравнивать её с PT моделью.

Легко заметить, что, согласно вычислительным результатам на выборке, модель теории перспектив достигает самых высоких средних доходностей в каждом наборе данных (особенно в Nikkei 225), чем MV и CPT модели. Несмотря на это, PT и CPT модели получили в основном лучшие значения параметра VaR, что демонстрирует хорошую защиту от просадок и согласуется с теоретической концепцией поведенческой портфельной теории. Однако PT и CPT модели показали более низкий уровень диверсификации сравнительно с моделью Марковица.

Сравнительный анализ базовых моделей на выборочных данных (in-sample) (см. табл. 3.8) показал:

- Модель теории перспектив в основном является более агрессивной, чем модели Марковица и кумулятивной теории перспектив, потому что она выбирает портфели с более высоким уровнем доходности. Возможно, референтная точка побуждает эту модель включать в портфель большее количество активов с большей доходностью. Несмотря на схожесть PT и CPT моделей, кумулятивная теория перспектив не ведет себя столь агрессивно из-за вероятностной весовой функции, которая предотвращает появление высокого риска в оптимальном портфеле;

- Модель теории перспектив в целом более эффективна, чем СРТ с точки зрения индикатора $\bar{r}/\sigma$;
- Поведенческие модели обладают большими преимуществами с точки зрения показателя VaR в сравнении с MV моделью в большинстве наборов данных. Этот факт отражает природу PT модели, которая предоставляет защиту от просадок на рынке;
- Поведенческие модели выбирают портфели, которые обычно менее диверсифицированы, чем модель Марковица;
- Индекс как актив в целом не очень привлекателен для всех трех моделей на наших данных. На волатильном рынке доходности индекса не привлекательны как инвестиция для моделей выбора портфелей, так как он дает меньше преимуществ в соотношении доходность и риск, чем обычные активы.

Здесь мы исследуем результаты работы и поведение моделей на вневыборочных данных. Мы применяем бутстрэп-тест, используя данные с временными периодами с 101 по 290. Мы выбираем случайным образом наблюдения из заданного диапазона для получения вневыборочных данных. Мы повторяем эту итерацию 1000 раз и статистически получаем характеристики оптимального портфеля в виде средней доходности, риска, VaR и CVaR.

Как показано в табл. 3.9, поведенческие модели находятся на лидирующих позициях с точки зрения доходности портфелей на большинстве множеств данных, в то время как MV модель лучше по параметру риска σ . Обращая внимание на соотношение $\bar{r}/\sigma$, можно заметить, что кумулятивная теория перспектив лучше в сравнении с остальными моделями. Также эта модель показывает лучшие результаты по показателям VaR и CVaR.

Для дальнейшего изучения мы дополнили наши тесты вне выборки для получения результатов работы моделей на данных «бычьего» и «медвежьего» рынков. Итоговые результаты, полученные на смоделированных данных вне выборки для «бычьего» рынка, основанного на распределении доходностей, которое является типичным для растущего рынка в период экономического подъема, показаны в табл. 3.10.

Согласно табл. 3.10, поведенческие модели, в особенности PT модель, показывают лучшие результаты с точки зрения средней доходности портфеля, а также параметров VaR и CVaR. Модель кумулятивной теории перспектив также показывает лучшие значения VaR и CVaR по сравнению с MV моделью. В то же время MV модель более предпочтительна с позиции риска (по параметру σ) и соотношению $\bar{r}/\sigma$.

Таблица 3.9

Сравнительный анализ базовых моделей (out-of-sample: бутстрэп)

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	0.6844	0.0014	0.0020	-0.0018	-0.0028
	PT	0.5388	0.0012	0.0021	-0.0023	-0.0031
	CPT	0.4260	0.0009	0.0021	-0.0026	-0.0035
DAX 100	MV	1.9785	0.0024	0.0012	0.0004	-0.0001
	PT	1.7766	0.0024	0.0013	0.0005	-0.0005
	CPT	2.4833	0.0033	0.0013	0.0012	0.0006
FTSE 100	MV	1.1103	0.0016	0.0014	-0.0008	-0.0014
	PT	1.6570	0.0023	0.0014	0.0000	-0.0006
	CPT	1.8717	0.0024	0.0013	0.0002	-0.0003
S&P 100	MV	0.7232	0.0013	0.0019	-0.0017	-0.0024
	PT	0.8441	0.0016	0.0019	-0.0015	-0.0023
	CPT	0.9175	0.0017	0.0019	-0.0012	-0.0021
Nikkei 225	MV	0.3317	0.0005	0.0016	-0.0021	-0.0029
	PT	0.9804	0.0019	0.0020	-0.0014	-0.0022
	CPT	0.9960	0.0019	0.0020	-0.0013	-0.0022

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Таблица 3.10

**Сравнительный анализ базовых моделей
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	22.3694	0.0795	0.0036	0.0736	0.0722
	PT	19.5623	0.0792	0.0040	0.0727	0.0724
	CPT	15.0646	0.0794	0.0053	0.0705	0.0686
DAX 100	MV	31.5966	0.1582	0.0050	0.1501	0.1478
	PT	22.6324	0.1583	0.0070	0.1471	0.1443
	CPT	21.0312	0.1584	0.0075	0.1458	0.1430
FTSE 100	MV	22.9827	0.1189	0.0052	0.1106	0.1084
	PT	27.4194	0.1187	0.0043	0.1115	0.1099
	CPT	30.1336	0.1188	0.0039	0.1120	0.1103
S&P 100	MV	23.7931	0.0986	0.0041	0.0918	0.0901
	PT	22.1445	0.0991	0.0045	0.0917	0.0894
	CPT	24.0876	0.0991	0.0041	0.0924	0.0904
Nikkei 225	MV	26.3628	0.1385	0.0053	0.1263	0.1236
	PT	18.3664	0.1388	0.0076	0.1301	0.1272
	CPT	17.5419	0.1382	0.0079	0.1248	0.1217

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Наши тесты имитационного моделирования «медвежьего» рынка вне выборки основаны на распределении доходности, которое характерно для снижающегося рынка в период экономического кризиса. Удивительно, что поведенческие модели, в особенности РТ модель, выглядят в основном лучше с точки зрения VaR и CVaR, но хуже по показателям σ и $\bar{r}/\sigma$ в сравнении с MV моделью, как можно увидеть в табл. 3.11. Согласно соотношению $\bar{r}/\sigma$, VaR и CVaR параметрам, РТ модель обладает преимуществом в сравнении с СРТ моделью на «медвежьем» рыночном тренде. В целом модель кумулятивной теории перспектив демонстрирует худшие результаты в этих тестах, особенно по показателю соотношения $\bar{r}/\sigma$, а также VaR и CVaR индикаторам. Также достаточно сложно сказать, какая модель представлена лучше с точки зрения средней доходности, потому что лучшие результаты для этого параметра колеблются между моделями от одного множества данных к другому.

Таблица 3.11

**Сравнительный анализ базовых моделей
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	0.2580	0.0004	0.0015	-0.0022	-0.0026
	PT	0.2187	0.0003	0.0016	-0.0022	-0.0030
	CPT	0.2659	0.0004	0.0016	-0.0023	-0.0030
DAX 100	MV	-0.1797	-0.0007	0.0036	-0.0067	-0.0081
	PT	-0.1460	-0.0006	0.0039	-0.0066	-0.0075
	CPT	-0.1912	-0.0008	0.0040	-0.0074	-0.0088
FTSE 100	MV	-0.0235	-0.0001	0.0035	-0.0061	-0.0075
	PT	-0.1712	-0.0004	0.0026	-0.0047	-0.0057
	CPT	-0.0619	-0.0002	0.0031	-0.0052	-0.0064
S&P 100	MV	-0.1088	-0.0003	0.0031	-0.0054	-0.0066
	PT	-0.0956	-0.0003	0.0030	-0.0054	-0.0065
	CPT	-0.2678	-0.0008	0.0032	-0.0060	-0.0074
Nikkei 225	MV	-0.0658	-0.0002	0.0038	-0.0064	-0.0079
	PT	0.0420	0.0002	0.0037	-0.0062	-0.0074
	CPT	-0.2317	-0.0009	0.0039	-0.0069	-0.0083

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Тесты на смоделированном «медвежьем» рынке показали преимущество РТ модели по критерию значения мер риска VaR и CVaR, которые особенно важны в условиях снижающегося рынка. Это означает, что поведенческий компонент РТ модели обеспечивает лучшую нижнюю под-

держку (защиту от просадок) в критичных рыночных ситуациях по сравнению с традиционным подходом Марковица.

Результаты для всех тестов со значениями моментов более высокого порядка (коэффициент асимметрии и эксцесс) отражены в приложении 3.

3.2.3. Сравнительный анализ моделей с ограничением на кардинальность

Результаты, полученные на выборочных данных, представлены в табл. 3.12. Мы заметили, что время работы программы для решения модели теории перспектив с ограничением на кардинальность немного меньше, чем для базовой версии. Генетический алгоритм работает быстрее в данном случае, потому что параметр K ограничивает пространство поиска. Интересно заметить, что РТ модель не достигает максимально разрешенного количества активов в портфеле в трех из пяти наборов данных, в то время как MV модель использует возможность включить в портфель так много активов, насколько разрешено.

Таблица 3.12

Сравнительный анализ ограниченных кардинальностью моделей (in-sample)

Множество данных	Модель	CPU	K	n	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng $d=0.0118$	MV	0.09	7	7	0.3919	0.0118	0.0301	-0.0363	-0.0643
	PT	37	7	6	0.3915	0.0132	0.0338	-0.0363	-0.0731
DAX 100 $d=0.006$	MV	0.25	10	10	0.4604	0.0060	0.0130	-0.0159	-0.0191
	PT	520	10	8	0.4484	0.0080	0.0179	-0.0141	-0.0250
FTSE 100 $d=0.0077$	MV	0.11	10	10	0.5631	0.0077	0.0137	-0.0122	-0.0180
	PT	600	10	8	0.5218	0.0096	0.0184	-0.0107	-0.0269
S&P 100 $d=0.0109$	MV	0.14	5	5	0.4911	0.0109	0.0222	-0.0263	-0.0371
	PT	690	5	5	0.4729	0.0120	0.0253	-0.0255	-0.0413
Nikkei 225 $d=0.0005$	MV	0.89	3	3	0.0023	0.0000	0.0209	-0.0381	-0.0439
	PT	1105	3	3	0.1420	0.0034	0.0239	-0.0327	-0.0369

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Подобно результатам, полученным на выборке для базовых моделей, MV модель с ограничением на кардинальность показывает лучшие значения σ , соотношения $\bar{r}/\sigma$ и CVaR, в то время как РТ модель оказалась лучше с точки зрения средней доходности и параметра VaR. Мы можем сделать вывод, что поведение модели теории перспектив не меняется

сильно с добавлением дополнительного ограничения на кардинальность и демонстрирует по-прежнему агрессивный выбор портфеля.

Результаты работы моделей вне выборки с использованием метода бутстрэп представлены в табл. 3.13. Модель теории перспектив опять выглядит лучше с точки зрения средней доходности портфеля и VaR по сравнению с MV моделью, в то время как модель Марковица показывает преимущество по показателю σ и в большинстве случаев по параметру CVaR. В то же время результирующие значения соотношения $\bar{r}/\sigma$ достаточно сложно проанализировать из-за неоднозначности результатов.

Таблица 3.13

**Сравнительный анализ ограниченных кардинальностью моделей
(out-of-sample: бутстрэп)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	0.5302	0.0011	0.0021	-0.0023	-0.0023
	PT	0.4391	0.0009	0.0022	-0.0027	-0.0035
DAX 100	MV	2.2284	0.0027	0.0012	0.0007	0.0002
	PT	2.1879	0.0028	0.0013	0.0008	0.0001
FTSE 100	MV	1.2833	0.0017	0.0014	-0.0005	-0.0011
	PT	1.6132	0.0025	0.0015	0.0000	-0.0006
S&P 100	MV	0.8257	0.0016	0.0020	-0.0017	-0.0024
	PT	0.9538	0.0021	0.0022	-0.0017	-0.0035
Nikkei 225	MV	0.1783	0.0003	0.0019	-0.0027	-0.0035
	PT	0.8366	0.0015	0.0018	-0.0015	-0.0022

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Согласно результатам тестирования вне выборки (моделирования «бычьего» и «медвежьего» рынков), представленным в табл. 3.14 и табл. 3.15, можно сделать похожие выводы в отношении поведения двух моделей. Модель Марковица в основном лучше по показателю риска σ и критерию соотношения $\bar{r}/\sigma$ на растущем рынке, в то время как на падающем рынке она демонстрирует результаты по CVaR параметру немного хуже, чем теория перспектив. Лучшие значения соотношения $\bar{r}/\sigma$ и средней доходности портфеля для моделей меняются от одного набора данных к другому на падающем рынке, что подчеркивает высокую волатильность доходностей в подобного рода рыночных ситуациях. Однако модель теории перспектив демонстрирует устойчивое преимущество по показателю $\bar{r}$ на растущем рынке и немного лучшие индикаторы риска VaR и CVaR на обоих типах рынка, что перекликается с результатами работы базовых моделей.

Таблица 3.14

**Сравнительный анализ ограниченных кардинальностью моделей
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	20.2696	0.0792	0.0039	0.0729	0.0715
	PT	20.2971	0.0792	0.0039	0.0727	0.0716
DAX 100	MV	27.3371	0.1585	0.0058	0.1491	0.1463
	PT	23.1736	0.1582	0.0068	0.1469	0.1465
FTSE 100	MV	22.9842	0.1187	0.0052	0.1103	0.1085
	PT	22.8369	0.1191	0.0052	0.1103	0.1088
S&P 100	MV	20.9687	0.0993	0.0047	0.0910	0.0890
	PT	20.4622	0.0994	0.0049	0.0910	0.0892
Nikkei 225	MV	16.6797	0.1393	0.0083	0.1246	0.1210
	PT	16.1642	0.1387	0.0086	0.1241	0.1214

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Таблица 3.15

**Сравнительный анализ ограниченных кардинальностью моделей
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	0.1935	0.0003	0.0015	-0.0022	-0.0028
	PT	0.1988	0.0003	0.0015	-0.0023	-0.0030
DAX 100	MV	-0.2595	-0.0010	0.0037	-0.0070	-0.0089
	PT	-0.2159	-0.0008	0.0037	-0.0066	-0.0084
FTSE 100	MV	0.0603	0.0002	0.0035	-0.0056	-0.0068
	PT	-0.0764	-0.0002	0.0033	-0.0056	-0.0068
S&P 100	MV	-0.2076	-0.0006	0.0031	-0.0056	-0.0069
	PT	-0.4262	-0.0013	0.0031	-0.0063	-0.0068
Nikkei 225	MV	-0.2621	-0.0011	0.0043	-0.0082	-0.0100
	PT	-0.0329	-0.0002	0.0046	-0.0076	-0.0094

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

3.2.4. Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR

Анализируя результаты работы базовых моделей и с ограничением на кардинальность, мы заметили, что поведенческие модели в общем выглядят лучше по критерию CVaR в сравнении с моделью Марковица. Следовательно, интересно посмотреть на результаты этих моделей с ограничением на CVaR. В данном пункте мы рассматриваем и анализируем результаты работы двух моделей (MV и PT моделей) с ограничением на CVaR, как сформулировано в параграфе 1.4.

Как видно из табл. 3.16, введение CVaR ограничения значительно увеличивает CPU время для модели теории перспектив. Мы можем заключить, что ограничение целевой доходностью совместно с лимитом на CVaR делает пространство поиска решения слишком узким на участке пересечения допустимых множеств решений. Генетическому алгоритму требуется намного больше времени для выхода из локальных оптимумов из-за меньшей свободы поиска. Мы также заметили, что диверсификация портфелей модели теории перспектив несильно изменилась по сравнению с базовой версией.

Таблица 3.16

Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR (in-sample)

Множество данных	Модель	z^*	CPU	n	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng $d=0.011$	MV	-0.056	0.03	8	0.380	0.011	0.029	-0.038	-0.056
	PT	-0.073	40	5	0.392	0.013	0.034	-0.039	-0.070
DAX 100 $d=0.007$	MV	-0.019	0.09	14	0.468	0.007	0.015	-0.013	-0.019
	PT	-0.027	647	5	0.442	0.009	0.020	-0.019	-0.024
FTSE 100 $d=0.007$	MV	-0.014	0.11	15	0.541	0.007	0.013	-0.012	-0.014
	PT	-0.025	754	18	0.513	0.009	0.018	-0.019	-0.025
S&P 100 $d=0.006$	MV	-0.014	0.12	23	0.550	0.006	0.011	-0.012	-0.014
	PT	-0.038	685	18	0.494	0.009	0.018	-0.023	-0.033
Nikkei 225 $d=0.002$	MV	-0.036	0.41	13	0.098	0.002	0.021	-0.030	-0.036
	PT	-0.049	2553	24	0.119	0.003	0.023	-0.033	-0.040

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Подобно предыдущим результатам на выборочных данных модель теории перспектив получает большие значения $\bar{r}$ в портфелях, чем портфели модели Марковица, однако, теряя позиции по показателям σ , VaR и CVaR, в силу того, что z^* (которая отражает CVaR ограничение) для PT модели задана значительно ниже (проигрывает), чем для MV модели, из-за области допустимых решений. Модель Марковица также выигрывает по показателю соотношения $\bar{r}/\sigma$ в каждом наборе данных, за исключением последнего, самого большого. В дополнение на этом множестве данных модель теории перспектив также показывает лучшую диверсификацию.

Результаты тестирования вне выборки методом бутстрэп для моделей с ограничением на CVaR представлены в табл. 3.17. Модель Марковица демонстрирует лучшие значения σ , в то время как модель теории перспектив сохраняет лидирующие позиции в отношении наибольших

значений $\bar{r}$ в каждом наборе данных, что было предсказуемым в силу результатов предыдущего анализа. В то же время другие критерии не могут рассказать много о поведении этих моделей. Результаты слишком противоречивые, чтобы делать какие-либо выводы.

Таблица 3.17

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR
(out-of-sample: бутстрэп)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	0.6665	0.0013	0.0019	-0.0021	-0.0029
	PT	0.0760	0.0002	0.0022	-0.0035	-0.0043
DAX 100	MV	2.2560	0.0028	0.0013	0.0009	0.0003
	PT	1.7529	0.0024	0.0014	0.0001	-0.0004
FTSE 100	MV	1.2400	0.0016	0.0013	-0.0006	-0.0011
	PT	1.7619	0.0024	0.0014	0.0001	-0.0005
S&P 100	MV	1.6640	0.0021	0.0012	0.0000	-0.0004
	PT	1.2857	0.0025	0.0019	-0.0007	-0.0015
Nikkei 225	MV	0.5530	0.0009	0.0016	-0.0017	-0.0024
	PT	0.9456	0.0015	0.0016	-0.0012	-0.0018

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

Другие результаты тестирования вне выборки, которые симулируют «бычий» и «медвежий» тренды, представлены в табл. 3.18 и табл. 3.19 и в целом подтверждают предыдущие выводы. На растущем рынке мы отме-

Таблица 3.18

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	19.7664	0.0793	0.0040	0.0727	0.0712
	PT	17.6371	0.0793	0.0045	0.0730	0.0716
DAX 100	MV	26.4675	0.1582	0.0060	0.1479	0.1457
	PT	20.4444	0.1579	0.0077	0.1477	0.1461
FTSE 100	MV	25.6109	0.1187	0.0046	0.1110	0.1089
	PT	25.9197	0.1189	0.0046	0.1114	0.1091
S&P 100	MV	38.2829	0.0990	0.0026	0.0947	0.0936
	PT	24.0364	0.0992	0.0041	0.0943	0.0938
Nikkei 225	MV	25.6196	0.1387	0.0054	0.1298	0.1271
	PT	27.5647	0.1381	0.0050	0.1294	0.1276

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Множество данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR
Hang Seng	MV	0.4767	0.0005	0.0011	-0.0013	-0.0017
	PT	0.3905	0.0004	0.0011	-0.0014	-0.0017
DAX 100	MV	-0.1402	-0.0005	0.0037	-0.0064	-0.0079
	PT	-0.1175	-0.0004	0.0038	-0.0068	-0.0078
FTSE 100	MV	-0.1006	-0.0003	0.0034	-0.0057	-0.0071
	PT	-0.1472	-0.0004	0.0030	-0.0054	-0.0067
S&P 100	MV	-0.1560	-0.0004	0.0028	-0.0050	-0.0062
	PT	-0.3418	-0.0009	0.0027	-0.0054	-0.0060
Nikkei 225	MV	-0.1673	-0.0007	0.0042	-0.0077	-0.0090
	PT	-0.1905	-0.0007	0.0039	-0.0071	-0.0085

Примечание. Жирным шрифтом обозначены наилучшие значения показателей.

чаем тенденцию лучших результатов модели теории перспектив с точки зрения показателей $\bar{r}$ и CVaR, в то время как модель Марковица показывает себя лучше по критериям соотношения $\bar{r}/\sigma$ и σ . На падающем рынке MV модель с ограничением на CVaR все же лучше по соотношению $\bar{r}/\sigma$, однако она преимущественно проигрывает по показателю σ в сравнении с PT.

Интересно отметить, что на снижающемся рынке модель теории перспектив с ограничением на CVaR демонстрирует большее преимущество по критерию CVaR, чем MV модель. Несмотря на более низкое ограничение на z^* по сравнению с MV моделью, модель PT превосходит результаты традиционного подхода с точки зрения CVaR. Удивительно, что поведенческие модели оказались более полезными в специфических условиях кризисного рынка в деле защиты от серьезных потерь, чем традиционный подход к выбору портфеля ценных бумаг.

3.3. Проблема слежения за индексом и модель теории перспектив

Модель слежения за индексом обычно выбирает много активов в оптимальный портфель, что затрудняет управление и пересмотр портфеля во времени. Поэтому часто в IT модель вводят ограничение на кардинальность, что делает эту проблему более вычислительно сложной для исследователей. В этом параграфе мы обсуждаем эмпирические результаты работы моделей IT и PT со слежением за индексом (с ограничением и без ограничения на кардинальность) на выборочных и вневыборочных

данных. В качестве тестов вне выборки мы используем только имитационное моделирование «бычьего» и «медвежьего» трендов (не применяем бутстрэп-метод).

3.3.1. Базовые модели слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом

Вычислительные результаты, представленные в этом пункте для проблем слежения за индексом, получены с использованием пяти множеств данных, описанных ранее, только с включением всех 290 временных периодов. Первый столбец в каждом множестве данных является индексом и не включается в инвестиционное поле всех активов. Мы также используем методологию, описанную выше, для симулирования растущего и падающего рынков для тестов вне выборки.

Мы анализируем результаты работы моделей по различным критериям, таким как время работы программы (CPU time), количество активов в портфеле n , ошибка слежения TE, ошибка слежения выше индекса TE о, ошибка слежения ниже индекса TE и. Необходимо отметить, что мы используем абсолютные значения TE, TE о, TE и для нашего анализа. Табл. 3.20 отражает эмпирические результаты эксперимента для использованных наборов данных.

Таблица 3.20

Сравнительный анализ моделей слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом (in-sample)

Множество данных	Модель	CPU time	n	TE	TE о	TE и
Hang Seng	IT	0.047	30	0.4290	0.2444	0.1845
	PT+IT	70	20	0.8420	0.5690	0.2730
DAX 100	IT	0.109	69	0.3354	0.1835	0.1519
	PT+IT	242	51	1.1763	0.7336	0.4427
FTSE 100	IT	0.141	81	0.2855	0.1657	0.1198
	PT+IT	250	46	1.1463	0.7919	0.3544
S&P 100	IT	0.125	83	0.2682	0.1553	0.1130
	PT+IT	347	67	0.9409	0.5881	0.3529
Nikkei 225	IT	0.266	159	0.1686	0.0921	0.0765
	PT+IT	1803	69	0.9802	0.6300	0.3501

Легко заметить в таблице, что количество активов в оптимальных портфелях модели PT с IT примерно в два раза меньше, чем в портфелях IT модели. Этот факт является хорошим преимуществом модели PT с IT по сравнению с традиционной моделью IT из-за транзакционных издержек, которые данная модель экономит, и удобства в управлении портфелем.

Очевидно, что ошибка слежения за индексом решений ИТ модели всегда меньше, чем у оптимальных портфелей модели РТ с ИТ, но все же сопоставима. Можно увидеть, что положительная разница между показателями ТЕ о для ИТ и РТ с ИТ моделей намного больше (в пропорции к ошибке слежения), чем между показателями ТЕ u для этих моделей. Это означает, что РТ с ИТ модель выбирает активы с большей доходностью, чем ИТ модель, используя референтную точку (индекс) только как стартовую, а не предельно высшего уровня. Это факт подтверждает, что модель РТ с ИТ больше заточена на то, чтобы превзойти референтную точку, чем не достигнуть ее вовсе.

Мы тестируем результаты работы двух моделей с применением моделирования различных распределений доходности и используем те же критерии для анализа. Сначала мы симулируем «бычий» рынок. Табл. 3.21 отражает эмпирические результаты этих экспериментов.

Таблица 3.21

**Сравнительный анализ моделей слежения за индексом
и теории перспектив со слежением за индексом
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Множество данных	Модель	ТЕ	ТЕ о	ТЕ u
Hang Seng	ИТ	0.1292	0.1292	0
	РТ+ИТ	0.3589	0.3589	0
DAX 100	ИТ	0.0934	0.0918	0.0016
	РТ+ИТ	0.5470	0.5470	0
FTSE 100	ИТ	0.1304	0.1304	0
	РТ+ИТ	0.6335	0.6335	0
S&P 100	ИТ	0.1271	0.1271	0
	РТ+ИТ	0.4432	0.4432	0
Nikkei 225	ИТ	0.1225	0.1225	0
	РТ+ИТ	0.5660	0.5660	0

Необходимо отметить, что поведение исследуемых моделей на «бычьем» рынке очень похоже на результаты, полученные на выборке. Хотя, согласно параметру ошибки слежения, портфели модели РТ с ИТ показывают меньшее значение, чем результаты на выборке.

Мы также тестируем результаты работы моделей, используя моделирование падающего рынка вне выборки. Интересно исследовать эти результаты для тех же моделей, но в противоположных условиях. В табл. 3.22 можно увидеть эмпирические результаты вне выборки.

В отличие от предыдущих результатов модель РТ с ИТ не показала хороших итоговых значений. Эта модель представлена хуже в каждом на-

Таблица 3.22

**Сравнительный анализ моделей слежения за индексом
и теории перспектив со слежением за индексом
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Множество данных	Модель	TE	TE o	TE u
Hang Seng	IT	0.1960	0.1960	0
	PT+IT	0.1806	0.1806	0
DAX 100	IT	0.2991	0.1673	0.1317
	PT+IT	0.2928	0.1481	0.1446
FTSE 100	IT	0.3013	0.1217	0.1795
	PT+IT	0.3136	0.1164	0.1972
S&P 100	IT	0.3026	0.1172	0.1854
	PT+IT	0.2984	0.1085	0.1899
Nikkei 225	IT	0.2750	0.1342	0.1408
	PT+IT	0.3017	0.0880	0.2137

боре данных по сравнению с моделью IT. Только по показателю ошибки слежения модель теории перспектив улучшилась, и ошибка стала даже меньше, чем для портфелей модели IT.

Подытоживая, мы можем отметить, что модель теории перспектив со слежением за индексом в качестве референтной точки является достаточно эффективной на растущем рынке в силу своей математической формулировки, которая стимулирует ее всегда превосходить референтную точку (в нашем случае значение индекса). Также она более полезна с точки зрения меньшего количества активов в оптимальном портфеле. Однако в кризисной рыночной ситуации модель PT с IT представлена хуже, чем IT. Но модель теории перспектив, модифицированная для слежения за индексом, работает хорошо в стабильных или растущих рыночных условиях.

3.3.2. Модели слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом с ограничением на кардинальность

Модель слежения за индексом с ограничением на кардинальность является вычислительно довольно сложной задачей. С одной стороны, оптимальное решение не известно и необходимо установить критерии остановки программы очень внимательно, чтобы получить лучшие результаты. С другой стороны, требуемое время работы программы значительно больше по сравнению с моделью, не ограниченной кардинальностью.

Для моделей слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом с ограничением на кардинальность мы используем те же лимиты на долю актива в портфеле $l_i = 0.01$, $u_i = 1$ ($i = 1, \dots, N$), как описано в п. 3.1.2, и параметр K^* , который отражает количество активов, разрешенных для включения в оптимальный портфель.

В табл. 3.23, 3.24 и 3.25 приведены результаты работы моделей ИТ и РТ с ИТ с ограничением на кардинальность на выборке и вневыборочных данных (моделирование «бычьего» и «медвежьего» рынков) в виде эмпирических результатов.

Таблица 3.23

**Сравнительный анализ моделей слежения за индексом
и теории перспектив со слежением за индексом с ограничением
на кардинальность (in-sample)**

Множество данных	Модель	CPU time	K^*	n	TE	TE o	TE u
Hang Seng	ИТ	102	15	15	0.5760	0.3316	0.2448
	РТ+ИТ	74	15	15	1.1871	0.7828	0.4044
DAX 100	ИТ	200	20	20	0.5889	0.3280	0.2609
	РТ+ИТ	275	20	20	1.3309	0.9616	0.3693
FTSE 100	ИТ	193	25	25	0.6650	0.3819	0.2831
	РТ+ИТ	323	25	24	1.4432	1.0323	0.4109
S&P 100	ИТ	176	25	25	0.5555	0.3223	0.2332
	РТ+ИТ	459	25	22	1.2972	0.9111	0.3861
Nikkei 225	ИТ	612	25	25	0.7211	0.3845	0.3367
	РТ+ИТ	2780	25	25	1.3179	0.9637	0.3542

Таблица 3.24

**Сравнительный анализ моделей слежения за индексом и теории
перспектив со слежением за индексом с ограничением на кардинальность
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Множество данных	Модель	TE	TE o	TE u
Hang Seng	ИТ	0.1519	0.1519	0
	РТ+ИТ	0.3915	0.3915	0
DAX 100	ИТ	0.1202	0.1195	0.0007
	РТ+ИТ	0.7190	0.7190	0
FTSE 100	ИТ	0.1826	0.1826	0
	РТ+ИТ	0.7285	0.7285	0
S&P 100	ИТ	0.1674	0.1674	0
	РТ+ИТ	0.6149	0.6149	0
Nikkei 225	ИТ	0.1296	0.1296	0
	РТ+ИТ	0.6326	0.6326	0

Таблица 3.25

Сравнительный анализ моделей слежения за индексом и теории перспектив со слежением за индексом с ограничением на кардинальность (out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)

Множество данных	Модель	TE	TE o	TE u
Hang Seng	IT	0.2484	0.2484	0
	PT+IT	0.1992	0.1992	0
DAX 100	IT	0.2907	0.1761	0.1145
	PT+IT	0.3343	0.1652	0.1691
FTSE 100	IT	0.3248	0.1165	0.2083
	PT+IT	0.3268	0.0954	0.2313
S&P 100	IT	0.2795	0.1208	0.1586
	PT+IT	0.3066	0.0876	0.2189
Nikkei 225	IT	0.2939	0.1720	0.1219
	PT+IT	0.3366	0.0943	0.2423

Как отражено в таблицах, поведение моделей с ограничением на кардинальность полностью аналогично поведению моделей IT и PT с IT без ограничения на кардинальность в различных условиях. Необходимо отметить, что время работы программ (CPU time) для поведенческой модели с дополнительным ограничением меняется несильно (в сторону возрастания) и это свидетельствует о том, что генетический алгоритм хорошо справляется с такого рода сложными проблемами. Итак, результаты моделей с ограничением на кардинальность подтверждают выводы о характере сравниваемых моделей, которые были сделаны выше.

Выводы

В этой главе представлено эмпирическое исследование и анализ. Мы обсуждаем параметры моделей и ограничений к ним, так же как и различные параметры разработанных эвристических алгоритмов, приложенных к моделям теории перспектив и кумулятивной теории перспектив. Мы упоминали выше, что в использовании эвристических алгоритмов для решения нелинейных задач важную роль в точности решения играют параметры этих алгоритмов.

Мы тестировали базовые модели MV, PT и CPT, а также их версии с ограничением на кардинальность и CVaR в различных рыночных условиях. Интересно отметить, что поведенческие модели (как с дополнительными ограничениями, так и без них) в целом были лучше с точки зрения доходности, VaR и CVaR на всех наборах данных. Референтная точка в этих моделях приводит к более агрессивным портфелям и более

высокому уровню доходности. Однако СРТ модель не настолько агрессивна как РТ модель в силу концентрации не только на избегании потерь, а также на трансформированных вероятностях, которые принимают во внимание количество доходностей ниже и выше референтной точки (кумулятивный принцип). Это отражается на выборе портфеля, обеспечивая портфели с лучшей нижней поддержкой (см. значения критерия CVaR для СРТ модели на выборке и вневыборочных данных).

Мы обнаружили, что даже на «медвежьем» рынке (out-of-sample test) модель теории перспектив была более полезной с точки зрения VaR и CVaR, чем традиционный подход Марковица. Удивительно, что данный вывод справедлив для этой модели и с ограничением на CVaR. Мы можем заключить, что поведенческие эффекты избегания потерь и риска, которые используются в модели теории перспектив, помогают сократить риск портфелей в форме VaR и CVaR.

В непредсказуемых рыночных условиях проблема выбора портфеля со слежением за индексом становится все более популярной. Мы изучили модель теории перспектив со слежением за индексом в качестве референтной точки (с условием на кардинальность и без него) в сравнении с базовой моделью слежения за индексом. Было обнаружено, что РТ модель более выгодна с точки зрения меньшего количества активов в портфеле, чем ИТ модель (с условием на кардинальность и без него), так как это преимущество сокращает транзакционные издержки и делает пересмотр (ребалансировку) портфеля более удобным. Мы также заметили, что доходность портфелей модели РТ со слежением за индексом в основном превосходит доходность индекса, что подтверждает наш предыдущий вывод о влиянии референтной точки. Однако на падающем рынке модель теории перспектив показала большие потери по сравнению с моделью слежения за индексом.

Заключение

Поведенческий подход к портфельной теории стал очень популярным в последней декаде, потому что рынок демонстрировал значительную нестабильность. В литературе существует множество теоретических свидетельств того, что поведенческие модели могут помочь в снижении риска портфеля, потому что они учитывают естественные предубеждения инвесторов относительно избегания потерь и риска. Однако мы обнаружили отсутствие практических и эмпирических исследований в литературе, которые могли бы показать и доказать эти преимущества и пролить свет на результаты работы этих моделей в различных рыночных ситуациях.

Основной научный результат

В этом исследовании мы изучали поведенческие модели, такие как модель теории перспектив и её дополненная версия – кумулятивная теория перспектив, используя сравнительный анализ с традиционными моделями Марковица и слежения за индексом. В целях изучения преимуществ поведенческого подхода мы внедрили ограничения на кардинальность и CVaR в эти модели и протестировали результаты вне выборки с использованием бутстрэп метода и имитационного моделирования динамики распределения доходностей «бычьего» и «медвежьего» рынков. Результаты были представлены для пяти множеств публично доступных данных, которые отражают динамику основных мировых рынков.

Мы разработали несколько методов решения для задач теории перспектив и кумулятивной теории перспектив с использованием эвристики. Для этого были реализованы алгоритм дифференциальной эволюции и генетический алгоритм на Matlab. Мы также обосновали выбор параметров этих методов решения, используя эмпирические тесты, принимая во внимание важность параметров эвристических алгоритмов для их практического применения.

Оба приложения модели теории перспектив (к проблемам портфельной оптимизации и слежения за индексом) показали достижение более высоких доходностей по сравнению с подходом моделей Марковица и слежения за индексом. Это может быть объяснено влиянием референтной точки. Модель теории перспектив стремится превзойти референтную точку (например, безрисковую ставку) настолько, насколько это возможно, что отражает психологические предубеждения. Следовательно, эта референтная точка сподвигает эту модель выбирать активы с большими доходностями вне зависимости от того, какой уровень желаемой доходности за весь инвестиционный период установлен.

Тесты вневыборочных данных также подтвердили, что применение модели теории перспектив на «бычьем» рынке дает больше преимуществ с точки зрения доходностей. В то же время в кризисной рыночной ситуации доходности РТ и СРТ моделей хуже по сравнению с моделью Марковица, но незначительно.

Основной вывод заключается в том, что поведенческие модели (с дополнительными условиями и без них) опережают модели традиционной портфельной оптимизации с точки зрения VaR и CVaR почти на всех тестах вневыборочных данных. Мы показали эмпирически, что психологические предубеждения, используемые в этих моделях, обеспечивают более надежную защиту от риска потерь и приводят к лучшим показателям VaR и CVaR, используемых в качестве мер риска, лучше отражающих «риск на хвостах» по сравнению с дисперсией.

В этом исследовании была изучена модель теории перспектив со слежением за индексом. Мы можем заключить, что оптимальные портфели по теории перспектив представляют лучшие результаты по показателю доходности, чем модель слежения за индексом и сам индекс на выборке и на растущем рынке. Однако РТ с ИТ модель оказалась немного хуже на падающем рынке по сравнению с моделью слежения за индексом. В то же время было обнаружено, что модель РТ с ИТ обычно дает менее диверсифицированные портфели, чем ИТ модель, что является преимуществом с точки зрения транзакционных издержек и проблемы управления портфелем.

Новизна и научные результаты данного исследования:

- 1) эвристические подходы к решению (алгоритм дифференциальной эволюции (базовая и со сплайн-интерполяцией) и генетический алгоритм), которые специально разработаны для моделей с поведенческими особенностями и способны работать с большим количеством активов;

- 2) эмпирическое подтверждение преимуществ модели теории перспектив по показателям VaR и CVaR по сравнению с моделью Марковица; модель теории перспектив тогда можно рассматривать как прототип модели mean-CVaR;
- 3) диверсификационное преимущество модели теории перспектив со слежением за индексом по сравнению с традиционной моделью слежения за индексом;
- 4) результаты тестирования на выборки и вневыборочных данных (моделирование растущего рыночного тренда) показали, что модель теории перспектив со слежением за индексом получает большую доходность, чем модель слежения за индексом (с условием на кардинальность и без него); можно сделать вывод, что модель теории перспектив со слежением за индексом является прототипом модели преодоления индекса (enhanced index tracking model).

Мы бы хотели сделать акцент на том, что в данном исследовании модель теории перспектив реализовывалась на данных с большим количеством активов. До сих пор только небольшие эксперименты были представлены в литературе (например, 2–3 актива). Таким образом, это эмпирическое исследование преследует цель вдохновить на использование теории перспектив на практике вместе с моделью Марковица и моделью слежения за индексом для специфических реальных рыночных условий.

Идеи для будущих исследований

Необходимо отметить, что проблема портфельной оптимизации с использованием поведенческих подходов является очень сложной задачей. Существуют несколько путей для изучения ее решений и результатов.

Как было отражено в этом исследовании, разработано несколько методов решения для задачи теории перспектив, учитывая специфические особенности модели. В качестве идеи для будущей работы можно внедрить более интеллектуальный выбор активов в портфель в фазу скрещивания генетического алгоритма, основываясь на наблюдениях и предпочтениях изучаемой модели. На каждом поколении можно отмечать активы, которые включаются в лучшие портфели, и использовать эту информацию для стадии скрещивания на следующем поколении. Вместо того, чтобы перебирать все активы, содержащиеся в данных, алгоритм может быстрее находить предпочтительные, используя информацию о частоте появления активов в предыдущих лучших портфелях. Это может помочь

сократить время работы программы для этого алгоритма путем сокращения пространства поиска подходящих активов для лучших портфелей и путем сокращения количества поколений.

В этом исследовании используются коэффициенты избегания потерь и риска, а также коэффициенты для функции взвешенных вероятностей, полученные Тверски и Канеманом в [47]. В наших тестах мы отмечали, что результаты работы моделей теории перспектив и кумулятивной теории перспектив очень чувствительны к значениям α , β , λ , γ и δ . Мы предполагаем, что эти параметры будут меняться в зависимости от реальных рыночных условий. Ранее мы обсуждали иррациональность поведения инвестора, потому что он/она становится более рисковым или азартным (стремится к большим рискам, чтобы отыгаться), когда сталкивается с потерями. Поэтому коэффициент избегания риска на растущем рынке должен быть выше, чем на падающем рынке. Интересно протестировать модель теории перспектив с различными значениями этих параметров в целях определения подходящих значений для различных рыночных условий.

Мы также исследовали результат работы модели теории перспектив с множеством ограничений и в различных условиях. Однако было бы интересно добавить безрисковый актив (например, наличные) в используемые данные для того, чтобы исследовать его влияние на поведение выбора модели. Что касается тестирования вневыборочных данных, было бы полезно получить и проанализировать результаты работы модели теории перспектив на имитационном моделировании трейдинга, которое включает период сохранения позиций и дальнейшего пересмотра портфеля. Можно запустить модель, используя $1, \dots, 100$ временных периодов, и получить лучший портфель. Затем должен быть осуществлен следующий запуск с использованием $10, \dots, 110$, что имитирует стадию пересмотра портфеля. Последовательное повторение этих шагов дадут результаты работы модели, полученные посредством техники, которая близка к реальным рыночным торгам, включая изменение выбранного портфеля на различных стадиях.

Список литературы

1. *Markowitz H.* Portfolio selection // The Journal of Finance. 1952. Vol. 7, № 1. P. 77–91.
2. *Rubinstein M.* Markowitz's portfolio selection : a fifty-year retrospective // The Journal of Finance. 2002. Vol. 57, № 3. P. 1041–1045.
3. *Williams J.* The theory of investment value. Harvard University Press, 1938. 613 p.
4. *Graham B.* The intelligent investor. N. Y. : Harper & Row, 1949. 264 p.
5. *Bernoulli D.* Exposition of a new theory on the measurement of risk // Econometrica. 1954. Vol. 22, № 1. P. 23–36.
6. *Neumann J., Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior. Princeton University Press, 1944. 625 p.
7. *Karni E.* Handbook of the economics of risk and uncertainty / ed. by Mark J. Machina, W. Kip Viscusi. Oxford : North Holland, 2014. Vol. 1. 320 p.
8. *Pirvu T. A., Schulze K.* Multi-stock portfolio optimization under prospect theory // Mathematics and Financial Economics. 2012. Vol. 6, № 4. P. 337–362.
9. *Rieger M., Wang M.* Prospect theory for continuous distributions // Journal of Risk Uncertainty. 2008. Vol. 36, № 1. P. 83–102.
10. *Allais M.* Le comportement de l'homme rationnel devant le risque : critique des postulats et axiomes de l'école américaine // Econometrica. 1953. Vol. 21, № 4. P. 503–546.
11. *Ellsberg D.* Risk, ambiguity, and the savage axioms // Quarterly Journal of Economics. 1961. Vol. 75, № 4. P. 643–669.

12. *Shefrin H., Statman M.* Behavioral portfolio theory // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 2000. Vol. 35, № 2. P. 127–151.
13. *Lopes L.* Between hope and fear: the psychology of risk // *Advances in Experimental Social Psychology* / ed. L. Berkowitz et al. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1987. P. 255–295.
14. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect theory: an analysis of decision under risk // *Econometrica*. 1979. Vol. 47. P. 263–291.
15. *Barberis N.* Thirty years of prospect theory in economics: a review and assessment // *Journal of Economic Perspectives*. 2013. Vol. 27, № 1. P. 173–196.
16. *Markowitz H.* Portfolio selection: efficient diversification of investments. N. Y.: John Wiley & Sons, 1959. 344 p.
17. *Das S., Markowitz H., Scheid J., Statman M.* Portfolio optimization with mental accounts // *Journal of Financial and Quantitative Analysis*. 2010. Vol. 45, № 2. P. 311–334.
18. *Iyiola O., Munirat Y., Nwifo C.* The modern portfolio theory as an investment decision tool // *Journal of Accounting and Taxation*. 2012. Vol. 4, № 2. P. 19–28.
19. *Mandelbrot B.* The variation of certain speculative prices // *Journal of Business*. 1963. № 36. P. 394–419.
20. *Fama E.* The behaviour of stock market prices // *Journal of Business*. 1965. № 38. P. 34–105.
21. *Black F., Litterman R.* Global portfolio optimization // *Financial Analysts Journal*. 1992. Vol. 48, № 5. P. 28–43.
22. *Peng H., Gan M., Chen X.* A mean-variance model for optimal portfolio selection with transaction costs // *Proceedings of the 17th World Congress. The International Federation of Automatic Control*. Seoul, Korea. July, 2008. Vol. 17, № 1. P. 1627–1632.
23. *Patel N., Subrahmanyam M.* A simple algorithm for optimal portfolio selection with fixed transaction costs // *Management Science*. 1982. № 28. P. 303–314.
24. *Fisher J., Lorie J.* Some studies of the variability of returns on investments in common stocks // *The Journal of Business*. 1970. № 43. P. 99–134.

25. *Evans J., Archer S.* Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis // *The Journal of Finance*. 1968. № 29. P. 761–767.
26. *Jacob N.* A limited-diversification portfolio selection model for the small investor // *The Journal of Finance*. 1974. № 29. P. 847–856.
27. *Szego G.* Portfolio theory: with application to bank asset management. N. Y.: Academic Press, 1980. 416 p.
28. *Sengupta J., Sfeir R.* Tests of efficiency of limited diversification portfolios // *Applied Economics*. 1985. № 17. P. 933–945.
29. *Curtis G.* Modern portfolio theory and behavioral finance // *The Journal of Wealth Management*. 2004. № 4. P. 16–22.
30. *Woodside-Oriakhi M., Lucas C., Beasley J.* Heuristics algorithms for the cardinality constrained efficient frontier // *European Journal of Operations Research*. 2011. № 213. P. 538–550.
31. *Beasley J., Meade N., Chang T.-J.* An evolutionary heuristic for the index tracking problem // *European Journal of Operational Research*. 2003. Vol. 148, № 3. P. 621–643.
32. *Roll R.* A mean – variance analysis of tracking error // *The Journal of Portfolio Management*. 1992. Vol. 18, № 4. P. 13–22.
33. *Reilly F. K., Brown K. C.* Investment Analysis Portfolio Management. 8th ed. South-Western, 2005. 604 p.
34. *Fama E., French K.* The cross-section of expected stock returns // *The Journal of Finance*. 1992. Vol. 47, № 2. P. 427–486.
35. *Shefrin L.* Beyond Greed and Fear. Understanding Behavioral Finance and The Psychology of Investing. N. Y.: Oxford University Press, 2002. P. 154.
36. *De Long J. B.* Noise trader risk in financial markets // *The Journal of Political Economy*. 1990. Vol. 98. P. 703–738.
37. *Teller F. B., Noise F. B.* Analysis in financial markets // *The Journal of Finance*. 1986. Vol. 41. P. 529–543.
38. *Rotella R. P.* The Elements of Successful Trading. New York: New York Institute of Finance, 1992. 154 p.
39. *Weber M., Zuchel H.* How do prior outcomes affect risk attitude? University of Mannheim, 2003. 174 p.

40. *Odean T.* Are investors reluctant to realise their losses // *The Journal of Finance*. 1998. Vol. 53(5). P. 1775–1798.
41. *Computational methods in financial engineering* / eds. E. Kontoghiorghes, B. Rustem, P. Winker. Springer, 2008. P. 425.
42. *Levy H., Levy M.* Prospect theory and mean-variance analysis // *The Review of Financial Studies*. 2004. № 17. P. 1015–1041.
43. *Schneider S., Lopes L.* Reflection in preferences under risk: who and when may suggest why // *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*. 1986. № 12. P. 535–548.
44. *Camerer C., Ho T.-H.* Violations of the betweenness axiom and nonlinearity in probability // *Journal of Risk and Uncertainty*. 1994. № 8. P. 167–196.
45. *Fennema H., Wakker P.* Original and cumulative prospect theory: a discussion of empirical differences // *Journal of Behavioral Decision Making*. 1997. Vol. 10. P. 53–64.
46. *Vlcek M.* Portfolio choice with loss aversion, asymmetric risk-taking behavior and segregation of riskless opportunities. Research paper series No 6-27. Swiss Finance Institute, 2006. 184 p.
47. *Tversky A., Kahneman D.* Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty // *Journal of Risk and Uncertainty*. 1992. № 5. P. 297–323.
48. *Gomes F.* Portfolio choice and trading volume with loss-averse investors // *Journal of Business*. 2005. № 78. P. 675–706.
49. *Hens T., Bachmann K.* Behavioural finance for private banking. N. Y.: John Wiley & Sons, 2008. 560 p.
50. *Barberis N., Huang M.* Stocks as lotteries: the implications of probability weighting for security prices // *American Economic Review*. 2008. № 98. P. 2066–2100.
51. *Bernard C., Ghossoub M.* Static portfolio choice under cumulative prospect theory // *Mathematics and Financial Economics*. 2010. № 2. P. 277–306.
52. *He X., Zhou X.* Portfolio choice under cumulative prospect theory: an analytical treatment // *Management Science*. 2011. № 57. P. 315–331.

53. *Zakamouline V., Koekebakker S.* A generalisation of the mean-variance analysis // *European Financial Management*. 2009. № 15. P. 934–970.
54. *Wakker P.* Unbounded utility functions for savage's «foundations of statistics» and other models // *Mathematics of Operations Research*. 1993. № 18. P. 446–485.
55. *Chateauneuf A., Wakker P.* An axiomatization of cumulative prospect theory for decision under risk // *Journal of Risk and Uncertainty*. 1999. Vol. 18, № 2. P. 137–145.
56. *Fisher I.* The nature of capital and income. N. Y.: Macmillan, 1906. 427 p.
57. *Holton G. A.* Defining risk // *Financial Analysts Journal*. 2004. Vol. 60, № 6. P. 19–25.
58. *Jorion P.* Value at Risk – the new benchmark for managing financial risk. 3rd ed. McGraw-Hill, 2007. 412 p.
59. *Danielsson J., Jorgensen B. N., Samorodnitsky G.* Fat tails, var and sub-additivity // *Journal of Econometrics*. 2013. Vol. 172, № 2. P. 283–291.
60. *Tasche D.* Expected shortfall and beyond // *Journal of Banking and Finance*. 2002. Vol. 26, № 7. P. 1519–1533.
61. *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.* Thinking coherently // *Risk*. 1997. № 10. P. 68–71.
62. *Rockafellar R., Uryasev S.* Optimization of conditional value-at-risk // *The Journal of Risk*. 2000. Vol. 2, № 3. P. 493–517.
63. *Acerbi C., Tasche D.* Expected shortfall: a natural coherent alternative to value at risk // *Economic Notes*. 2002. Vol. 31, № 2. P. 379–388.
64. *Roman D., Darby-Dowman K., Mitra G.* Mean-risk models using two risk measures: a multi-objective approach // *Quantitative Finance*. 2007. № 74. P. 443–458.
65. *Pflug G. C.* Some remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk // *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications* / ed. S. Uryasev. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2000. P. 272–281.
66. Consultative document: fundamental review of the trading book. Available at: <http://www.bis.org/publ/bcbs219.pdf> (accessed 17 July 2013), May, 2012.

67. *Allen D. E., Powell R. J.* Thoughts on VaR and CVaR // International Conference on Modelling and Simulation. Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand. Christchurch, 2007. P. 1843–1850.
68. *Yamai Y., Toshinao Y.* Comparative analyses of expected shortfall and value at risk // Institute for Monetary and Economic Studies. Bank of Japan. 2002. № 1. P. 110–131.
69. *Uryasev S., Sarykalin S., Serraino G., Kalinchenko K.* VaR vs. CVaR in risk management and optimization // Presentation at CARISMA conference. London, 2010. P. 21–33.
70. *Uryasev S.* Conditional value-at-risk: optimization algorithms and applications // Financial Engineering News. 2000. № 14. P. 1–5.
71. *Rockafellar R., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of Banking & Finance. 2002. № 26. P. 1443–1447.
72. *Konno H., Shirakawa H., Yamazaki H.* A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimisation model // Annals of Operations Research. 1993. № 45. P. 205–220.
73. *Konno H., Suzuki K.* A mean-variance-skewness portfolio optimisation model // Journal of Operations Research Society of Japan. 1995. Vol. 38, № 2. P. 173–187.
74. *Wang J.* Mean-variance-VaR based portfolio optimisation. Available at: <http://ww2.valdosta.edu/~jwang/paper/PortfolioOpt.pdf> (accessed 27 July 2013).
75. *Harvey C., Liechty R., Liechty M., Mueller P.* Portfolio selection with higher moments. Available at: <http://ssrn.com/abstract=634141> (accessed 17 July 2013).
76. *Chang T.-J., Meade N., Beasley J. E., Sharaiha Y. M.* Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation // Computers and Operations Research. 2000. № 27. P. 1271–1302.
77. *Brito R. P., Vinecent L.* Portfolio investment. Available at: <http://www.mat.uc.pt/~lnv/papers/cardMV.pdf> (accessed 18 July 2013).
78. *Chang T.-J., Yang S.-C., Chang K.-J.* Portfolio optimization problems in different risk measures using genetic algorithm. // Expert Systems with Applications: An International Journal. 2009. Vol. 36, № 7. P. 10529–10537.

79. *Holland J.* Adaptation in natural and artificial systems: an introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press, 1975. 212 p.
80. *Storn R., Price K.* Differential evolution – a simple and efficient adaptive scheme or global optimization over continuous spaces // *Journal of Global Optimization*. 1997. Vol. 11. P. 341–359.
81. *Price K., Storn R., Lampinen J.* Differential evolution: a practical approach to global optimization. Berlin: Springer, 2005. 312 p.
82. *Гришина Н. П., Сидоров С. П.* Использование дифференциальной эволюции для решения одного класса задач оптимального инвестирования // *Изв. Саратов. ун-та. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика*. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2. С. 88–92.
83. *Wahba G., Craven P.* Smoothing noisy data with spline functions estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation // *Numerische Mathematik*. 1978. Vol. 31. P. 377–404.
84. *De Giorgi E., Hens T., Mayer J.* Computational aspects of prospect theory with asset pricing applications // *Computational Economics*. 2007. Vol. 29, № 3–4. P. 267–281.
85. *Mitchell M.* An introduction to genetic algorithms. Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1996. 364 p.
86. *Beasley J.* Population heuristics // *Handbook of Applied Optimization* / eds. P. M. Pardalos, M. G. C. Resende. Oxford University Press, 2002. P. 138–157.
87. *Local search in combinatorial optimization* / eds. E. H. L. Aarts, J. K. Lenstra. Princeton University Press, USA, 2003. P. 512.
88. *Haimes Y., Lasdon L. S., Wismer D. A.* On a bicriterion formulation of the problems of integrated system identification and system optimization // *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 1971. Vol. 1. P. 296–297.
89. *Steuer R. E.* Multiple criteria optimization: theory, computation and application. N. Y.: Wiley & Sons, 1986. 400 p.
90. *Beasley J. E.* Index tracking. OR-Library. Available at: <http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/indtrackinfo.html> (accessed 17 August 2013).
91. *Morgan J.* Riskmetrics – technical document. N. Y.: J. P. Morgan/Reuters, 1996. 220 p.

92. *Akbaripour H., Masehian E.* Efficient and robust parameter tuning for heuristic algorithms // International Journal of Industrial Engineering & Production Research. 2013. Vol. 24, № 2. P. 143–150.
93. *Feoktistov V.* Differential evolution : in search of solutions. Springer Optimization and Its Applications. N. Y. : Springer, 2006. 500 p.
94. *Fogel D. B.* Evolutionary computation : toward a new philosophy of machine intelligence. Hoboken, New Jersey : Wiley & Sons, 2006. 384 p.
95. *Alander J. T.* On optimal population size of genetic algorithms // Computer Systems and Software Engineering – CompEuro. IEEE Computer Society Press, 1992. P. 65–70.

Приложения

Приложение 1. Реализация подходов к решению

1. Алгоритм дифференциальной эволюции

Представим псевдокод алгоритма дифференциальной эволюции для проблемы портфельной оптимизации по теории перспектив с ограничением на кардинальность.

```
Generate initial population  $v_i \in D_K$ ,  $i = 1, \dots, P^2$ ,
cycle of  $G$  generations
  for each  $v_i$  in population  $P$ 
    choose 3 random vectors  $v_a \neq v_b \neq v_c \neq v_i$ 
    for each component  $j$  of  $v_i$  do
      with probability  $\pi_1 : z_1 \leftarrow N(0, \sigma_1)$ , else  $z_1 = 0$ 
      with probability  $\pi_2 : z_2 \leftarrow N(0, \sigma_2)$ , else  $z_2 = 0$ 
      pick  $u_j \sim U(0, 1)$ 
      if  $u_j < CR$  or  $j = R$ 
        then  $\tilde{v}_{ij} = v_{aj} + (F + z_1)(v_{bj} - v_{cj} + z_2)$ 
        else  $\tilde{v}_{ij} = v_{ij}$ 
      if  $PT(\tilde{v}_i) > PT(v_i)$ 
        then  $x_i = \tilde{v}_i$ 
        else  $x_i = v_i$ 
  In  $g = G$  find  $x_i^* = \{x_i | \max\{PT_{cc}(x_1), \dots, PT_{cc}(x_{P^2})\},$ 
   $E(\max PT_{cc}(x_i)) \geq d\}$ .
```

В начале скрипт файла мы устанавливаем счетчик времени работы программы. Затем вводим все предписанные параметры, постоянные и переменные модели. Мы используем матрицу доходностей активов как вводные данные, которые мы загружаем из соответствующего файла, считаем средние доходности для каждого актива и определяем размер вектора множества активов. Мы также вычисляем d для специфических данных, используя диапазон возможных доходностей для этого сета. Основ-

ной скрипт файл следует шагам алгоритма дифференциальной эволюции, вызывая разработанные функции для генерации начальной популяции, скрещивания и мутации, а также для вычисления целевой функции и ожидаемой доходности портфеля.

Первая функция генерирует начальную популяцию (матрица $N \times P^2$) с ограничением на количество активов K , которое выбрано случайно для каждого вектора на отрезке $[3, K]$. Каждый элемент этой матрицы сгенерирован случайным образом, следуя правилу $0.1 + 0.9 \times v$, где $v \in U(0, 1)$ с целью уменьшения появления малых значений. Затем мы нормализуем каждый вектор начальной популяции и проверяем условие $\sum_{i=1}^N \omega_i = 1$, а также проверяем верхний и нижний лимиты на долю каждого актива l_i и u_i .

На каждом поколении алгоритма мы применяем скрещивание и мутацию дифференциальной эволюции. При помощи разработанной функции выбора для каждого вектора в популяции мы выбираем случайным образом 3 целых числа, соответствующих номерам векторов, которые отличны от этого вектора и друг от друга. Затем мы находим z_1 и z_2 с предписанными вероятностями и осуществляем скрещивание дифференциальной эволюции, следуя правилам, описанным в п. 2.1.1. Мы нормализуем абсолютные значения полученного вектора, проверяем ограничения l_i и u_i , а также ограничение на кардинальность. После этого необходимо снова провести нормализацию. Специфика данного алгоритма заключается в том, что из-за формулы скрещивания веса распределяются по всему сету активов и становятся слишком маленькими. Поэтому необходимо нормализовать дважды, до и после проверки на упомянутые ограничения. Затем мы выбираем наиболее подходящий вектор по критерию максимального значения целевой функции. Специально разработанная функция обеспечивает расчет значения полезности теории перспектив в соответствии с формулировкой проблемы (1.18). В итоге создаем новую популяцию.

На последнем поколении $g = G$ мы выбираем решение из последней популяции, которое имеет максимальное значение целевой функции и удовлетворяет d ограничению. Мы используем разработанную функцию для подсчета ожидаемой полезности каждого потенциального решения.

Примечание. При работе с большими сетами данных алгоритм дифференциальной эволюции не смог найти лучшего решения для выбранного d . В данном случае мы используем некоторую окрестность для па-

раметра d в виде $d - n$. Мы начинаем выбирать корректное n , начиная с 0.00002, и увеличиваем каждый раз умножением на 10, если программа все еще не находит оптимального решения.

Для метода решения алгоритмом дифференциальной эволюции со сплайн-интерполяцией мы модифицируем функцию, которая рассчитывает полезность теории перспектив. В новой функции мы определяем значения полезности, которые очень близки к началу координат с обеих сторон, положительной и отрицательной, и внедряем сплайн-интерполяцию в целях сглаживания целевой функции, используя коэффициенты, полученные в (2.3).

Легко переделать стандартную проблему теории перспектив в проблему теории перспектив со слежением за индексом. Мы просто меняем скалярное значение референтной точки r_0 на динамические значения индекса. Мы также удаляем проверку на d ограничение из основного скрипта.

Теория перспектив с CVaR решается с использованием того же основного скрипта, если поменять стадию финальной оценки в целях выбора решения, которое удовлетворяет не только целевой доходности, но и ограничению на CVaR. Мы также разработали функцию расчета CVaR для портфеля.

Необходимо отметить, что для базовой модели теории перспектив (без ограничения на кардинальность) мы кладем $K = N$ для упразднения ограничения на кардинальность.

2. Генетический алгоритм

Представим псевдокод генетического алгоритма для проблемы портфельной оптимизации по теории перспектив с ограничением на кардинальность.

```

Generate initial population  $x_i \in D_K$ ,  $i = 1, \dots, P^2$ ,
cycle of  $G$  generations
  calculate values  $PT_{cc}(x_1), \dots, PT_{cc}(x_{P^2})$ 
  sort  $PT_{cc}(x_{m_1}) \geq \dots \geq PT_{cc}(x_{m_{P^2}})$ 
  save max  $PT_{cc}(x_i)$ 
 $x_{m_1}, \dots, x_{m_{2P}} = y_1, \dots, y_{2P}$  proceed to the next generation
  randomly pick  $\tilde{x}_j$  and  $\hat{x}_k$  in the set  $\{x_{m_{2P}}, \dots, x_{m_{P^2}}\}$ 
   $\forall i, j, k, l, i, j, k = 2P + 1, \dots, P^2, l = 1, \dots, N$ 
    if  $\tilde{x}_{jl} = \omega_j$  and  $\hat{x}_{kl} = \omega_k$ 
      then  $a_{il} = \chi \cdot \omega_j + (1 - \chi) \cdot \omega_k, \chi \in U(0, 1)$ 
    else if  $\tilde{x}_{jl} = 0$  and  $\hat{x}_{kl} = 0$ 

```

```

        then  $a_{il} = 0$ 
      else if  $\tilde{x}_{jl} = \omega_j$  and  $\hat{x}_{kl} = 0$ 
        then with  $\pi$   $a_{il} = \omega_j$ 
      with mutation probability  $\zeta > 0$ 
       $a_{il} \leftarrow \hat{a}_{ij}$ ,  $\hat{a}_{il} \in U(0, 1)$ 
      choose  $\max PT_{cc}(y_i) = \max\{a_i, \tilde{x}_j, \hat{x}_k\}$ 
      find  $PT_{cc}(y_i) = \max\{PT_{cc}(y_1), \dots, PT_{cc}(y_{p^2})\}$ 
      choose  $PT_{cc}(y_i^*) = \max\{\max PT_{cc}(y_i), \max PT_{cc}(x_i)\}$ 
 $y^*i$  is an optimal solution
  
```

Для этого алгоритма мы разработали четыре функции для создания начальной популяции, вычисления целевой функции (полезности теории перспектив), скрещивания и мутации элементов новой популяции, а также расчета ожидаемой доходности каждого вектора весов активов. Все эти функции используются в основном скрипте, который следует шагам генетического алгоритма, описанным в п. 2.1.3. Так как все функции, за исключением скрещивания и мутации, идентичны алгоритму дифференциальной эволюции, мы опишем здесь только вторую функцию, которая является специфической для генетического алгоритма.

Функция скрещивания и мутации была разработана в целях создания новой популяции из $2P$ лучших элементов начальной популяции, которые не меняются и из $P^2 - 2P$ элементов, которые используются для скрещивания. В данном случае, если элемент содержится в обоих родителях, мы случайным образом выбираем $\chi \in U(0, 1)$ и применяем формулу $a_{il} = \chi \cdot \omega_j + (1 - \chi) \cdot \omega_k$ для того, чтобы решить, какой вес этого актива необходимо взять. По нашему мнению, он должен отличаться от весов этого актива в родительских портфелях. В данном случае, если элемент не присутствует в обоих родителях, мы просто кладем вес этого элемента 0 для ребенка. Если элемент есть только в одном родителе, то мы включаем этот элемент с его весом в портфель ребенка с выбранной вероятностью π . Вероятность $\pi = 10\%$ была выбрана с учетом особенностей выбора активов данного конкретного метода решения. Он сходится к решению с малым количеством активов с достаточно высокими доходностями. Более высокий уровень вероятности увеличивает время работы алгоритма без улучшения решения.

В этой функции мы также осуществляем мутацию. Необходимо отметить, что мы мутируем только нулевые элементы. Затем мы проверяем ограничение на кардинальность двумя путями. Если количество ненулевых элементов n в векторе больше, чем K , мы определяем разницу $\delta = n - K$ и в цикле δ повторений мы случайным образом выбираем элементы

в этом векторе и если они больше нуля, то делаем их нулями. Если $n < 3$ (потому что нам не интересны портфели, состоящие из двух элементов), мы случайным образом выбираем нулевой элемент и генерируем значение, используя правило $0.1 + 0.9 \times v$, где $v \in U(0, 1)$ так же, как и в первой функции. Затем мы нормализуем вектор ребенка и проверяем верхний и нижний лимиты на долю актива в портфеле. Необходимо определить, какой вектор, мама, папа или ребенок, перейдет в новую популяцию. Мы выбираем вектор по максимальному значению целевой функции.

Все дополнения к модели теории перспектив (слежение за индексом, полезность кумулятивной теории перспектив и ограничение на CVaR) можно внести, используя модифицированные функции расчета полезности теории перспектив или применяя разработанную функцию для ограничения на CVaR в главном скрипте, подобно тому, как описано в п. 1. Также ограничение на кардинальность можно убрать, если положить $K = N$.

Прочие имплементации

Помимо методов, описанных выше, мы пробовали и другие способы решения. Например, мы начали с применения встроенного солвера генетического алгоритма *ga* из программного пакета Global Optimization Toolbox на Matlab. Этот солвер находит минимум функции, используя принцип генетического алгоритма. В нашем случае было сложно определить и установить основные параметры, которые влияют на решение. Лучший портфель, полученный этим способом, включал в себя только один актив, что не представляет интереса для нашего анализа.

Такая же проблема возникла, когда мы использовали солвер *psoptimset* (поиск по образцам) из программного пакета Global Optimization Toolbox на Matlab. Эта функция оптимизирует целевую функцию с нелинейными ограничениями. Уровень диверсификации лучших портфелей, полученных с использованием солвера *psoptimset*, нас не устроил.

Мы также разрабатывали алгоритм дифференциальной эволюции и генетический алгоритм на AMPL, однако обнаружили, что очень сложно реализовать некоторые специфические стадии и особые правила скрещивания на этом языке программирования в отличие от Matlab.

Приложение 2. Параметры G и P для генетического алгоритма

Таблица П. 1

Сравнительный анализ параметров генетического алгоритма
для сета данных DAX 100

Параметр	Значение параметра	CPU time	$PT(x)$	ξ
G	150	444	0.5937	0.0152
	180	550	0.6442	0.0002
	210	652	0.6243	0.0001
P	35	415	0.5694	0.0032
	40	550	0.6442	0.0002
	45	697	0.6437	0.0001

Таблица П. 2

Сравнительный анализ параметров генетического алгоритма
для сета данных FTSE 100

Параметр	Значение параметра	CPU time	$PT(x)$	ξ
G	160	532	0.823	0.0043
	185	630	0.8429	0.0004
	220	718	0.8429	0.0002
P	37	479	0.8423	0.0164
	42	630	0.8429	0.0004
	47	755	0.8431	0.0002

Таблица П. 3

Сравнительный анализ параметров генетического алгоритма
для сета данных S&P 100

Параметр	Значение параметра	CPU time	$PT(x)$	ξ
G	160	586	0.7353	0.0172
	190	721	0.7822	0.0006
	220	953	0.7853	0.0004
P	40	542	0.7421	0.0043
	45	721	0.7822	0.0006
	50	994	0.7864	0.0003

**Сравнительный анализ параметров генетического алгоритма
для сета данных Nikkei 225**

Параметр	Значение параметра	CPU time	$PT(x)$	ξ
G	160	1050	-0.9555	0.0001
	190	1179	-0.9894	0
	220	1547	-0.9894	0
P	40	939	-0.9468	0.0021
	45	1179	-0.9894	0
	50	1486	-0.9894	0

Примечание. Параметры G и P для сета данных Nikkei 225 одинаковы с сетом данных S&P 100 в нашем эмпирическом исследовании, так как специфически для этих доходностей (сет данных Nikkei 225) генетический алгоритм находит решение достаточно быстро. Поэтому нам не требуется увеличивать количество поколений и размер популяции. Итоговый портфель не диверсифицирован в сравнении с количеством всех доступных активов. Алгоритм определяет предпочтительные активы очень быстро и оставшееся время просто слегка играет с весами.

Приложение 3. Результаты работы моделей

1. Анализ моментов высокого порядка

Мы заметили, что портфели модели кумулятивной теории перспектив обладают большим значением асимметрии (skewness) на тестах на выборке и вне выборки по сравнению с прочими моделями. Модель Марковица, напротив, отличается более низким положительной асимметрией и большей отрицательной. Это может означать, что оптимальные портфели поведенческих моделей обладают более длинными и тяжелыми хвостами справа и меньшими хвостами слева по сравнению с традиционным подходом Марковица. Мы можем заключить, что портфели моделей РТ и СРТ имеют меньший риск на левом хвосте распределения, что приводит к меньшему значению CVaR для этих портфелей. Более того, модель СРТ имеет более низкий скос (kurtosis), что также указывает на более тонкий хвост распределения доходностей портфеля в сравнении с прочими моделями.

Модели, ограниченные кардинальностью и CVaR, демонстрируют противоречивые результаты, и можно отметить тенденцию стремления к результатам, полученным на выборке. Отрицательная асимметрия результатов модели теории перспектив всегда меньше, чем отрицательная асим-

метрия модели MV. Это обеспечивает хорошую защиту от просадок для поведенческих портфелей. Достаточно сложно сделать какие-либо выводы, сравнивая показатели скоса PT и MV моделей с дополнительными ограничениями. Невозможно выделить определенный тренд, так как результаты меняются на каждом сете данных. Только для моделей с ограничением CVaR можно заметить, что в большинстве случаев PT модель имеет скос немного ниже, чем MV модель.

2. Базовые модели

Таблица П. 5

Сравнительный анализ базовых моделей (in-sample)

Сет данных	Модель	CPU	n	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.015	9	0.3926	0.0118	0.0301	-0.0373	-0.0644	-0.7680	4.5608
	PT	36	8	0.3922	0.0131	0.0335	-0.0371	-0.0727	-0.8875	5.5543
	CPT	104	5	0.3616	0.0130	0.0359	-0.0500	-0.0668	-0.0902	3.4314
DAX 100	MV	0.031	16	0.4683	0.0060	0.0128	-0.0141	-0.0197	0.3862	3.9497
	PT	550	12	0.4529	0.0083	0.0183	-0.0145	-0.0248	0.9056	4.9426
	CPT	1790	7	0.4369	0.0080	0.0183	-0.0144	-0.0206	1.2203	5.9422
FTSE 100	MV	0.031	14	0.5636	0.0077	0.0137	-0.0121	-0.0178	0.4545	3.0106
	PT	630	17	0.4797	0.0090	0.0188	-0.0114	-0.0272	0.5584	3.6605
	CPT	1904	22	0.4933	0.0085	0.0171	-0.0153	-0.0163	0.9358	3.8126
S&P 100	MV	0.046	11	0.5115	0.0109	0.0213	-0.0279	-0.0328	-0.1170	2.5519
	PT	721	6	0.4940	0.0109	0.0221	-0.0267	-0.0391	-0.2376	3.1125
	CPT	1994	7	0.4717	0.0105	0.0222	-0.0265	-0.0265	0.1630	2.5377
Nikkei 225	MV	0.14	13	0.0159	0.0003	0.0196	-0.0349	-0.0395	0.2528	3.1046
	PT	1179	4	0.1434	0.0034	0.0238	-0.0338	-0.0384	0.4089	3.1774
	CPT	4862	4	0.1598	0.0039	0.0246	-0.0325	-0.0326	0.4674	2.5090

Таблица П. 6

Сравнительный анализ базовых моделей (out-of-sample: бутстрэн)

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.6844	0.0014	0.0020	-0.0018	-0.0028	-0.0643	2.8745
	PT	0.5388	0.0012	0.0021	-0.0023	-0.0031	0.0597	2.9079
	CPT	0.4260	0.0009	0.0021	-0.0026	-0.0035	-0.0179	3.0211
DAX 100	MV	1.9785	0.0024	0.0012	0.0004	-0.0001	0.0886	3.1530
	PT	1.7766	0.0024	0.0013	0.0005	-0.0005	-0.1066	3.0137
	CPT	2.4833	0.0033	0.0013	0.0012	0.0006	0.0271	2.9207
FTSE 100	MV	1.1103	0.0016	0.0014	-0.0008	-0.0014	0.0003	3.0648
	PT	1.6570	0.0023	0.0014	0.0000	-0.0006	-0.0860	2.8541
	CPT	1.8717	0.0024	0.0013	0.0002	-0.0003	-0.0985	3.1009
S&P 100	MV	0.7232	0.0013	0.0019	-0.0017	-0.0024	0.0242	3.1616
	PT	0.8441	0.0016	0.0019	-0.0015	-0.0023	0.0090	3.0802
	CPT	0.9175	0.0017	0.0019	-0.0012	-0.0021	0.0520	2.9262
Nikkei 225	MV	0.3317	0.0005	0.0016	-0.0021	-0.0029	-0.1178	3.1631
	PT	0.9804	0.0019	0.0020	-0.0014	-0.0022	-0.0796	3.0106
	CPT	0.9960	0.0019	0.0020	-0.0013	-0.0022	-0.0470	3.2628

Таблица П. 7

**Сравнительный анализ базовых моделей
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	22.3694	0.0795	0.0036	0.0736	0.0722	0.0077	2.9332
	PT	19.5623	0.0792	0.0040	0.0727	0.0724	-0.0733	2.8786
	CPT	15.0646	0.0794	0.0053	0.0705	0.0686	0.0415	3.0163
DAX 100	MV	31.5966	0.1582	0.0050	0.1501	0.1478	-0.1712	3.2582
	PT	22.6324	0.1583	0.0070	0.1471	0.1443	-0.0164	2.6740
	CPT	21.0312	0.1584	0.0075	0.1458	0.1430	0.0159	3.0393
FTSE 100	MV	22.9827	0.1189	0.0052	0.1106	0.1084	0.0645	2.9462
	PT	27.4194	0.1187	0.0043	0.1115	0.1099	0.0363	2.9529
	CPT	30.1336	0.1188	0.0039	0.1120	0.1103	-0.1184	3.0554
S&P 100	MV	23.7931	0.0986	0.0041	0.0918	0.0901	-0.0690	3.1821
	PT	22.1445	0.0991	0.0045	0.0917	0.0894	-0.1353	3.0277
	CPT	24.0876	0.0991	0.0041	0.0924	0.0904	-0.0349	3.0953
Nikkei 225	MV	26.3628	0.1385	0.0053	0.1263	0.1236	-0.1799	3.0711
	PT	18.3664	0.1388	0.0076	0.1301	0.1272	0.0396	2.9534
	CPT	17.5419	0.1382	0.0079	0.1248	0.1217	-0.0604	2.9483

Таблица П. 8

**Сравнительный анализ базовых моделей
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.2580	0.0004	0.0015	-0.0022	-0.0026	0.1180	2.9394
	PT	0.2187	0.0003	0.0016	-0.0022	-0.0030	-0.0006	3.1120
	CPT	0.2659	0.0004	0.0016	-0.0023	-0.0030	-0.0475	3.0858
DAX 100	MV	-0.1797	-0.0007	0.0036	-0.0067	-0.0081	0.0224	2.9247
	PT	-0.1460	-0.0006	0.0039	-0.0066	-0.0075	0.0936	3.2210
	CPT	-0.1912	-0.0008	0.0040	-0.0074	-0.0088	0.0864	2.8924
FTSE 100	MV	-0.0235	-0.0001	0.0035	-0.0061	-0.0075	-0.0557	3.1055
	PT	-0.1712	-0.0004	0.0026	-0.0047	-0.0057	0.0261	2.7377
	CPT	-0.0619	-0.0002	0.0031	-0.0052	-0.0064	0.0311	2.8292
S&P 100	MV	-0.1088	-0.0003	0.0031	-0.0054	-0.0066	-0.0098	2.8096
	PT	-0.0956	-0.0003	0.0030	-0.0054	-0.0065	-0.0253	3.0193
	CPT	-0.2678	-0.0008	0.0032	-0.0060	-0.0074	0.1160	3.4702
Nikkei 225	MV	-0.0658	-0.0002	0.0038	-0.0064	-0.0079	0.1018	2.9981
	PT	0.0420	0.0002	0.0037	-0.0062	-0.0074	0.0569	2.9714
	CPT	-0.2317	-0.0009	0.0039	-0.0069	-0.0083	0.2360	2.9105

3. Модели с ограничением на кардинальность

Таблица П. 9

Сравнительный анализ моделей с ограничением на кардинальность (in-sample)

Сет данных	Модель	CPU	K	n	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.09	7	7	0.3919	0.0118	0.0301	-0.0363	-0.0643	-0.7415	4.5296
	PT	37	7	6	0.3915	0.0132	0.0338	-0.0363	-0.0731	-0.9107	5.7858
DAX 100	MV	0.25	10	10	0.4604	0.0060	0.0130	-0.0159	-0.0191	0.5002	4.2193
	PT	520	10	8	0.4484	0.0080	0.0179	-0.0141	-0.0250	1.0201	5.4878
FTSE 100	MV	0.11	10	10	0.5631	0.0077	0.0137	-0.0122	-0.0180	0.4317	2.9809
	PT	600	10	8	0.5218	0.0096	0.0184	-0.0107	-0.0269	0.2667	3.0293
S&P 100	MV	0.14	5	5	0.4911	0.0109	0.0222	-0.0263	-0.0371	-0.2159	2.8623
	PT	690	5	5	0.4729	0.0120	0.0253	-0.0255	-0.0413	-0.1791	2.8395
Nikkei 225	MV	0.89	3	3	0.0023	0.0000	0.0209	-0.0381	-0.0439	0.2057	3.4939
	PT	2597	3	3	0.1420	0.0034	0.0239	-0.0327	-0.0369	0.4254	2.9207

Таблица П. 10

Сравнительный анализ моделей с ограничением на кардинальность (out-of-sample: бутстрэп)

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.5302	0.0011	0.0021	-0.0023	-0.0023	-0.0626	3.0993
	PT	0.4391	0.0009	0.0022	-0.0027	-0.0035	0.0549	2.9751
DAX 100	MV	2.2284	0.0027	0.0012	0.0007	0.0002	0.0580	2.8808
	PT	2.1879	0.0028	0.0013	0.0008	0.0001	0.0533	3.1195
FTSE 100	MV	1.2833	0.0017	0.0014	-0.0005	-0.0011	-0.0076	2.8525
	PT	1.6132	0.0025	0.0015	0.0000	-0.0006	0.0746	3.0577
S&P 100	MV	0.8257	0.0016	0.0020	-0.0017	-0.0024	0.0175	3.0635
	PT	0.9538	0.0021	0.0022	-0.0017	-0.0035	0.0083	2.8979
Nikkei 225	MV	0.1783	0.0003	0.0019	-0.0027	-0.0035	0.0701	3.1857
	PT	0.8366	0.0015	0.0018	-0.0015	-0.0022	-0.0003	3.0719

Таблица П. 11

Сравнительный анализ моделей с ограничением на кардинальность (out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	20.2696	0.0792	0.0039	0.0729	0.0715	0.0667	2.7705
	PT	20.2971	0.0792	0.0039	0.0727	0.0716	0.0255	3.1279
DAX 100	MV	27.3371	0.1585	0.0058	0.1491	0.1463	-0.0617	3.0681
	PT	23.1736	0.1582	0.0068	0.1469	0.1465	-0.0722	3.0509
FTSE 100	MV	22.9842	0.1187	0.0052	0.1103	0.1085	0.0468	2.6911
	PT	22.8369	0.1191	0.0052	0.1103	0.1088	-0.1554	3.0641
S&P 100	MV	20.9687	0.0993	0.0047	0.0910	0.0890	-0.1045	3.0191
	PT	20.4622	0.0994	0.0049	0.0910	0.0892	-0.0721	2.9410
Nikkei 225	MV	16.6797	0.1393	0.0083	0.1246	0.1210	-0.2357	2.9273
	PT	16.1642	0.1387	0.0086	0.1241	0.1214	-0.0476	3.5053

Таблица П. 12

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на кардинальность
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.1935	0.0003	0.0015	-0.0022	-0.0028	0.0173	2.9740
	PT	0.1988	0.0003	0.0015	-0.0023	-0.0030	-0.1112	3.0485
DAX 100	MV	-0.2595	-0.0010	0.0037	-0.0070	-0.0089	-0.0577	3.0591
	PT	-0.2159	-0.0008	0.0037	-0.0066	-0.0084	-0.0563	3.0952
FTSE 100	MV	0.0603	0.0002	0.0035	-0.0056	-0.0068	0.1463	2.9910
	PT	-0.0764	-0.0002	0.0033	-0.0056	-0.0068	0.1090	2.8824
S&P 100	MV	-0.2076	-0.0006	0.0031	-0.0056	-0.0069	0.0738	3.1490
	PT	-0.4262	-0.0013	0.0031	-0.0063	-0.0068	0.0145	3.0402
Nikkei 225	MV	-0.2621	-0.0011	0.0043	-0.0082	-0.0100	0.0001	3.0062
	PT	-0.0329	-0.0002	0.0046	-0.0076	-0.0094	0.1757	3.2297

4. Модели с ограничением на CVaR

Таблица П. 13

Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR (in-sample)

Сет данных	Модель	CPU	n	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.03	8	0.3803	0.0110	0.0289	-0.0379	-0.0560	-0.4039	3.7601
	PT	40	5	0.3916	0.0134	0.0343	-0.0389	-0.0695	-0.6682	4.9819
DAX 100	MV	0.09	14	0.4681	0.0070	0.0150	-0.0125	-0.0190	0.8177	4.7537
	PT	647	5	0.4422	0.0087	0.0196	-0.0189	-0.0236	1.0310	4.9838
FTSE 100	MV	0.11	15	0.5405	0.0070	0.0129	-0.0121	-0.0140	0.6732	3.2146
	PT	754	18	0.5127	0.0090	0.0176	-0.0193	-0.0246	0.5455	3.4378
S&P 100	MV	0.12	23	0.5502	0.0060	0.0109	-0.0120	-0.0140	-0.1668	2.5543
	PT	685	18	0.4940	0.0091	0.0184	-0.0228	-0.0326	-0.2698	3.2304
Nikkei 225	MV	0.41	13	0.0976	0.0020	0.0205	-0.0303	-0.0359	0.3086	2.8616
	PT	2553	24	0.1192	0.0027	0.0226	-0.0333	-0.0398	0.3268	2.9935

Таблица П. 14

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR
(out-of-sample: бутстрэп)**

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.6665	0.0013	0.0019	-0.0021	-0.0029	-0.1827	3.0386
	PT	0.0760	0.0002	0.0022	-0.0035	-0.0043	0.0276	3.0790
DAX 100	MV	2.2560	0.0028	0.0013	0.0009	0.0003	0.1613	3.4775
	PT	1.7529	0.0024	0.0014	0.0001	-0.0004	-0.0045	2.9947
FTSE 100	MV	1.2400	0.0016	0.0013	-0.0006	-0.0011	-0.1315	2.8959
	PT	1.7619	0.0024	0.0014	0.0001	-0.0005	-0.0070	3.0636
S&P 100	MV	1.6640	0.0021	0.0012	0.0000	-0.0004	0.0636	2.9329
	PT	1.2857	0.0025	0.0019	-0.0007	-0.0015	0.0631	3.0299
Nikkei 225	MV	0.5530	0.0009	0.0016	-0.0017	-0.0024	-0.0866	2.8032
	PT	0.9456	0.0015	0.0016	-0.0012	-0.0018	-0.0131	2.8478

Таблица П. 15

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR
(out-of-sample: симуляция «бычьего» рынка)**

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	19.7664	0.0793	0.0040	0.0727	0.0712	0.0963	2.8726
	PT	17.6371	0.0793	0.0045	0.0730	0.0716	-0.0638	2.9289
DAX 100	MV	26.4675	0.1582	0.0060	0.1479	0.1457	0.0123	3.0686
	PT	20.4444	0.1579	0.0077	0.1477	0.1461	0.0799	2.6602
FTSE 100	MV	25.6109	0.1187	0.0046	0.1110	0.1089	-0.0580	3.1282
	PT	25.9197	0.1189	0.0046	0.1114	0.1091	-0.0336	3.0600
S&P 100	MV	38.2829	0.0990	0.0026	0.0947	0.0936	-0.0364	2.8962
	PT	24,0364	0.0992	0.0041	0.0943	0.0938	-0.1241	3.0880
Nikkei 225	MV	25.6196	0.1387	0.0054	0.1298	0.1271	-0.1693	3.0234
	PT	27.5647	0.1381	0.0050	0.1294	0.1276	-0.0939	2.9247

Таблица П. 16

**Сравнительный анализ моделей с ограничением на CVaR
(out-of-sample: симуляция «медвежьего» рынка)**

Сет данных	Модель	$\bar{r}/\sigma$	$\bar{r}$	σ	VaR	CVaR	skewness	kurtosis
Hang Seng	MV	0.4767	0.0005	0.0011	-0.0013	-0.0017	-0.0812	3.1465
	PT	0.3905	0.0004	0.0011	-0.0014	-0.0017	-0.0050	3.1637
DAX 100	MV	-0.1402	-0.0005	0.0037	-0.0064	-0.0079	0.1444	3.5092
	PT	-0.1175	-0.0004	0.0038	-0.0068	-0.0078	0.1031	3.2481
FTSE 100	MV	-0.1006	-0.0003	0.0034	-0.0057	-0.0071	0.2879	3.3762
	PT	-0.1472	-0.0004	0.0030	-0.0054	-0.0067	0.0371	3.2816
S&P 100	MV	-0.1560	-0.0004	0.0028	-0.0050	-0.0062	0.0431	3.1581
	PT	-0.3418	-0.0009	0.0027	-0.0054	-0.0060	0.0466	3.2402
Nikkei 225	MV	-0.1673	-0.0007	0.0042	-0.0077	-0.0090	0.1943	3.2532
	PT	-0.1905	-0.0007	0.0039	-0.0071	-0.0085	0.0980	2.9356

5. Графики распределения доходностей портфеля (пример)

Рис. П. 1–П. 4 отражают распределение доходностей портфелей моделей Марковица, теории перспектив и кумулятивной теории перспектив на выборке и вне выборки для сета данных S&P 100 в качестве приме-

ра. Эти графики иллюстрируют выводы, сделанные в данной работе и в анализе моментов высшего порядка, о том, что портфели поведенческих моделей обладают более узкими хвостами распределения доходностей слева и более высокими доходностями по сравнению с результатами модели Марковица вне выборки. Согласно рис. П. 1, MV модель имеет чуть более толстый хвост распределения, чем PT и CPT модели, хотя все модели демонстрируют очень похожее распределение доходностей портфеля. Однако на бутстрэп тестах модель кумулятивной теории перспектив обладает большим преимуществом на левом хвосте по сравнению с прочими моделями (см. рис. П. 2). В то же время модель теории перспектив показывает большие преимущества на симуляциях «бычьего» и «медвежьего» рынков с точки зрения распределения на левом хвосте, что приводит к меньшему (по модулю) значению меры риска CVaR (см. рис. П. 3 и П. 4).

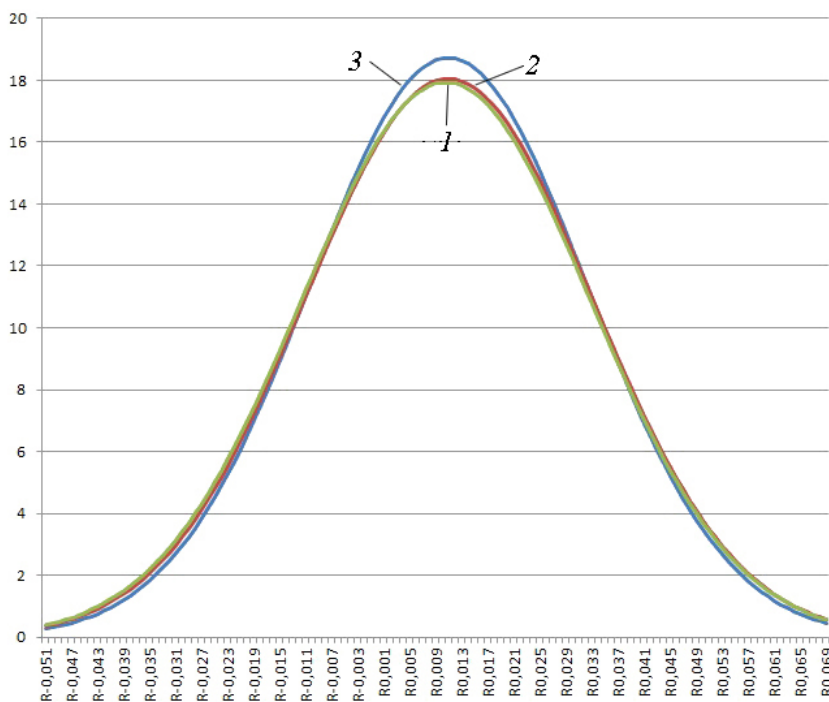


Рис. П. 1. S&P 100. Базовые модели. In-sample: 1 – MV, 2 – PT, 3 – CPT

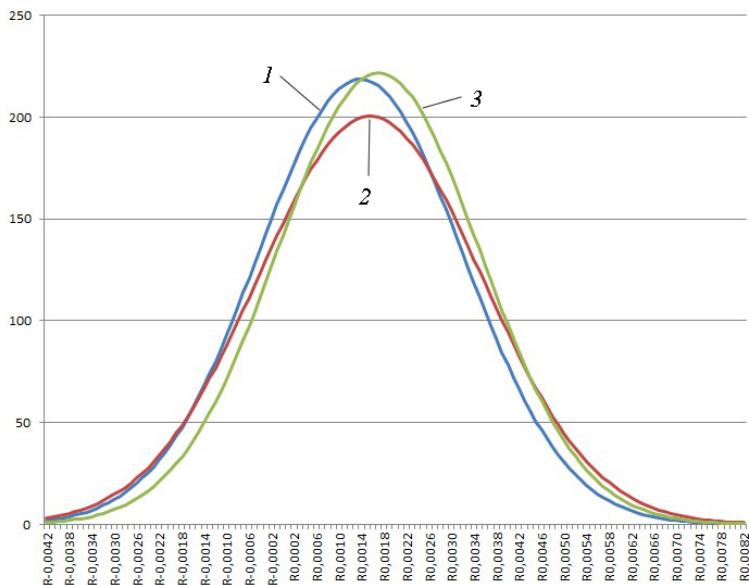


Рис. П. 2. S&P 100. Базовые модели. Out-of-sample (бутстрэп): 1 – MV, 2 – PT, 3 – CPT

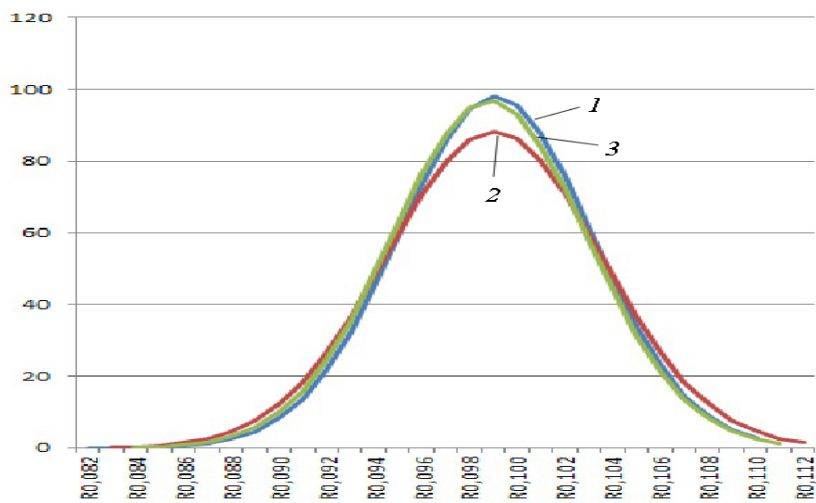


Рис. П. 3. S&P 100. Базовые модели. Out-of-sample (симуляция «бычьего» рынка): 1 – MV, 2 – PT, 3 – CPT

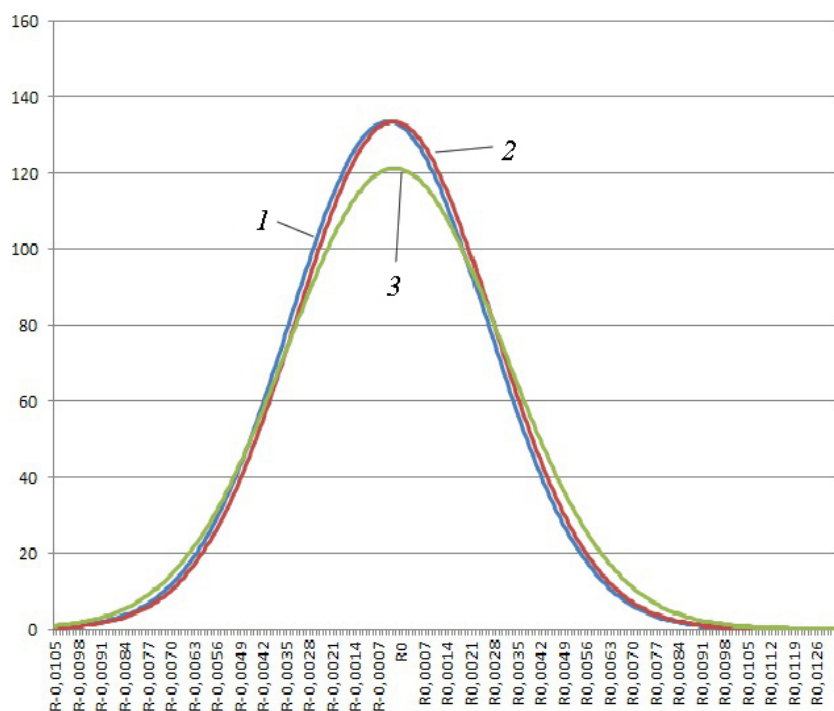


Рис. П. 4. S&P 100. Базовые модели. Out-of-sample (симуляция «медвежьего» рынка): 1 – MV, 2 – PT, 3 – CPT

Научное издание

Гришина Нина Павловна

**ПОВЕДЕНЧЕСКИЙ ПОДХОД
К ПРОБЛЕМЕ ВЫБОРА
ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ**

Редактор *О. Л. Багаева*

Технический редактор *Т. А. Трубникова*

Корректор *О. Л. Багаева*

Оригинал-макет подготовил *И. А. Каргин*

Подписано в печать 29.12.2015. Формат 60 × 84¹/₁₆.
Усл. печ.л.6.97 (7.5). Тираж 100. Заказ № 70-Г.

Издательство Саратовского университета.
410012, Саратов, Астраханская, 83.
Типография Саратовского университета.
410012, Саратов, Б. Казачья, 112А.