СРАВНЕНИЕ МЕТОДОВ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ С УЧЕТОМ ТЕОРИИ ПЕРСПЕКТИВ

А.А. Хомченко, Н.П. Гришина

В статье рассматриваются два подхода к решению не выпуклой задачи оптимизации портфеля по теории перспектив Канемана-Тверски: алгоритм дифференциальной эволюции и сглаживание функции полезности с помощью сплайна. В работе представлен вычислительный эксперимент и сравнительный анализ результатов работы двух подходов. Полученные результаты позволяют сделать вывод о преимуществах эвристических алгоритмов в решении нелинейных задач.

Теория оптимального портфельного инвестирования предполагает, что функция полезности инвестора является вогнутой, а доходности активов имеют нормальное распределение. С другой стороны, характеристики распределений доходностей активов, а так же предпочтения лиц, принимающих решения, не удовлетворяют этим предположениям. В связи с этим возникают различные подходы к определению оптимального портфеля. Один из таких подходов, использующий более реалистичную модель предпочтения и выбора**,** основан на теории поведенческих финансов.

Канеман и Тверски обнаружили [1], что при принятии инвестиционных решений инвесторы асимметрично относятся к потерям и выигрышам, а именно переоценивают либо вероятность, либо величину потерь. Это приводит к добавлению новых ограничений в классическую модель, а сама оптимизационная задача становится невыпуклой.

Учет поведенческих аспектов отношения инвестора к потерям приводит рассмотрению задачи

$$x \in D := \left\{ x = (x_1, \ldots x_n) \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots n \right\}, \tag{1}$$

$$u(r) = \begin{cases} (r - r_0)^{\alpha}, r \geq r_0, \\ \lambda (r_0 - r)^{\alpha}, r < r_0. \end{cases} \tag{2}$$

$$E(u(r(x))) \to \max_{x \in D}, \tag{3}$$

где r_0 есть заданный уровень доходности, *r(x)* есть доходность портфеля *x,* α, λ есть положительные константы, характеризующие отношение инвестора к потерям.

Отметим, что задача (1) – (3) не является выпуклой, а функция (2) не является дифференцируемой.

Для решения задачи (1) – (3) мы используем два подхода. Первый основан на применении методов эвристического поиска, а второй – на сглаживании функции (2) с помощью сплайн интерполяции.

Алгоритм дифференциальной эволюции

Недавнее дополнение к классу эволюционных эвристик является метод дифференциальной эволюции, предложенный Р. Сторном и К. Прайсом [2, 3]. В нашей работе для решения задачи (1) – (3) мы используем алгоритм дифференциальной эволюции. Дифференциальная эволюция (ДЭ) основана на эволюционном принципе.

По историческим данным торгов вычисляются наибольшее и наименьшее возможные значения ожидаемой доходности портфеля. Полученный отрезок мы разбиваем на *S* (*S* = 30) равных промежутков $[Er_k, Er_{k+1}]$, $k = 1..S$, на каждом из которых ведется поиск оптимального портфеля.

Изначально генерируется некоторое множество векторов, называемых популяцией. Начальная популяция *P* из векторов $v_i \in D$, $i = 1..N$, где N – количество особей в исходной популяции, выбирается случайным образом, v_i должны быть равномерно распределены в пространстве поиска.

На каждой итерации алгоритм генерирует новую популяцию векторов случайным образом, комбинируя векторы из предыдущего поколения. Для каждого вектора $v_i \in D$

выбираются три различных произвольных вектора $v_a, v_b, v_c \in D$, не совпадающих с v_i, и генерируется вектор следующим образом:

$$\tilde{v}_j = v_{a,j} + (F + z_1)(v_{b,j} - v_{c,j} + z_2),$$

где F – положительная действительная константа из интервала [0, 2], управляющая усилением влияния разности $(v_{b,j} - v_{c,j} + z_2)$ на результирующий вектор; z_1 и z_2 или равны нулю с малыми вероятностями (например, 0,0001 и 0,0002 соответственно), или являются нормально распределенными случайными величинами с математическим ожиданием, равным нулю, и малым стандартным отклонением (например, 0,02). Параметры z_1 и z_2 есть необязательные параметры алгоритма дифференциальной эволюции, они необходимы для внесения «шума» в вычисление результирующего вектора, что помогает избегать попадание в локальные экстремумы.

Для выполнения операции селекции производим преобразование $\tilde{v}_j$ и v_j в $\tilde{x}_j$ и x_j соответственно. Для этого все компоненты исходных векторов, имеющих отрицательные значения, заменяем на ноль, а каждый положительный компонент делим на сумму всех компонентов вектора, таким образом, сумма компонент результирующих векторов равна 1.

Вектор $\tilde{v}_j$ заменяет v_j и переходит в новое поколение, если выполняются условия:

$$\begin{aligned} &1.\quad E(u(r(\tilde{x}_j))) > E(u(r(x_j))) \\ &2.\quad E(u(r(\tilde{x}_j))) \in [Er_k, Er_{k+1}] \end{aligned} \tag{4}$$

Описанные выше стадии метода дифференциальной эволюции повторяются по достижению заданного числа итераций. Получившаяся в результате популяция содержит векторы, из которых необходимо выбрать «лучший», то есть с наибольшим значением целевой функции, в нем и будет достигаться оптимум целевой функции.

Сглаживание функции полезности с помощью сплайна

Заметим, что функция (2) не является дифференцируемой в точке $r = r_0$. Альтернативный подход к вычислению эффективного портфеля согласно теории перспектив, основанный на сглаживании целевой функции, состоит в использовании кубического сплайна в δ - окрестности точки $r = r_0$.

Пусть $\delta > 0$ и пусть $p(r) = ar^3 + br^2 + cr + d$. Коэффициенты кубического полинома находим из системы уравнений:

$$\begin{cases} p(-\delta + r_0) = u(-\delta + r_0) \\ p'(-\delta + r_0) = u'(-\delta + r_0) \\ p(\delta + r_0) = u(\delta + r_0) \\ p'(\delta + r_0) = u'(\delta + r_0) \end{cases}$$

Обеспечивая тем самым равенство на концах отрезка $[\delta + r_0; -\delta + r_0]$ значений функций p и u и их производных, рассмотрим задачу:

$$u_\delta(r) = \begin{cases} p(r),\ r \in [\delta + r_0; -\delta + r_0] \\ u(r),\ r \notin [\delta + r_0; -\delta + r_0] \end{cases} \tag{5}$$

$$E(u_\delta(r(x))) \to \max\nolimits_{x \in D} \tag{6}$$

Функция $u_\delta(r)$ является гладкой и дифференцируемой в точке $r = r_0$. Для решения задачи (1), (2), (5), (6) с гладкой функцией полезности мы использовали решатель Minos 5.5, разработанный для решения гладких нелинейных оптимизационных задач.

Вычислительный эксперимент

В вычислительном эксперименте использовались реальные данные об акциях 93 компаний за 522 промежуток времени. Для нахождения оптимальных портфелей и построения эффективной границы с использованием метода дифференциальной эволюции применялся пакет прикладных программ Matlab, решалась задача (1) – (3). Численность популяции устанавливается равной N = 80, число итераций алгоритма K = 1500, коэффициент неприятия потерь λ =2.25, а ожидаемый уровень доходности инвестора w_0 = 1.004. Спустя K итераций векторы из популяции сравниваются между собой с помощью условий (4), результатом финальной оценки является вектор v_i и соответствующий ему искомый вектор долей x_j. Для улучшения производительности алгоритма, если на некотором отрезке $[Er_k, Er_{k+1}]$ за 750 итераций не происходит изменения поколения, то итерации прекращаются, и происходит финальная оценка.

Для решения задачи (1), (2), (5), (6) применялся пакет Ampl (решатель Minos 5.5) с параметрами: окрестность δ = 0.00001, коэффициент неприятия потерь λ =2.25, а ожидаемый уровень доходности инвестора w_0 = 1.004.

Для того чтобы сравнить результаты, полученные на основе этих двух методов, мы произвольным образом выбрали 3 портфеля, найденных с помощью методов дифференциальной эволюции, и подсчитали для них значения ожидаемой доходности. Для трех заданных значений ожидаемой доходности мы решили нелинейную оптимизационную задачу с помощью алгоритма, написанного на Ampl с применением решателя Minos. Приведем результаты сравнения:

Показатель	ДЭ	Minos	ДЭ	Minos	ДЭ	Minos
$E(u(r(x)))$	-0,02552893	-0,02563193	-0,0230838	-0,0240745	-0,0226339	-0,0230125
Волатильность	0,008543329	0,0087	0,00903069	0,00987	0,00993426	0,0110
Ожидаемая доходность	1,0000353		1,0007631		1,0012694	

Отметим что во всех трех случаях значение математического ожидания функции полезности выше для портфелей, найденных с помощью алгоритма дифференциальной эволюции, также эти портфели менее рискованные.

Полученный результат можно объяснить наличием некоторого числа локальных экстремумов у функций $E(u_\delta(r(x)))$ и $E(u(r(x)))$, и в случае поиска оптимума с помощью Minos были найдены именно они. Наличие недетерминированных элементов в дифференциальной эволюции дает возможность избегать попадание в локальные экстремумы.

Заключение

Эвристические финансовые методы становятся все более популярными по сравнению с альтернативными традиционными методами оптимизации. Эвристические методы легче преодолевают локальные экстремумы. Кроме того, перезапуск алгоритма не обязательно приводит к одному и тому же результату, если поиск сходится к локальному оптимуму в первый раз, то при другом запуске может определиться другой оптимум – в идеале глобальный. Все эти качества дают возможность использовать эвристические методы для широкого класса задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kahneman D., Tversky A.* Prospect theory : An analysis of decision under risk // Econometrica. 1979. Vol. 47. P. 263–291.

2. *Storn R., Price K.* Differential Evolution – A simple and efficient adaptive scheme or global optimization over continuous spaces // J. of Global Optimization. 1997. Vol. 11. P. 341–359.

3. *Price K., Storn R. M., Lampinen J. A.* Differential Evolution : A Practical Approach to Global Optimization. Berlin : Springer, 2005.